

EXERCICE 1

On considère les équations différentielles :

$$\begin{cases} (E) : y'' + 4y = 3\cos(x) \\ (E_0) : y'' + 4y = 0. \end{cases}$$

- ① Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \cos(x)$ est une solution de (E) .
- ② Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
- ③
 - a Résoudre l'équation : (E_0) .
 - b En déduire les solutions de (E) .
 - c Déterminer la solution de (E) dont la courbe C dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ passe par O et admette en O une tangente parallèle à $(O, \vec{i})$.

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + 4y = 0$.

- ① Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) .
- ② La plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle (E) qui satisfait aux conditions ci-dessous :
 - ✓ La courbe représentative de f passe par le point $A(\frac{\pi}{2}, -1)$.
 - ✓ La tangente à cette courbe en A est parallèle à la droite $D : y = 2x$.
- ③ Montrer que : $f(x) = \sqrt{2}\cos(2x + \frac{\pi}{4})$.
- ④ Soit S le solide de révolution obtenue en faisant tourner l'arc $[MN]$ de la courbe de f autour de l'axe des abscisses dont les extrémités M et N ont pour coordonnées $M(0, 1)$ et $N(\frac{\pi}{8}, 0)$.
Calculer le volume de S .



EXERCICE 3

On considère pour tout $x \in [0, 2[$, l'équation différentielle (E) : $y' + y = \frac{e^{-x}}{(2-x)^2}$.

① Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.

②

✓ Soit f une fonction dérivable sur $[0, 2[$ tel que $f(1) = e^{-1}$.

✓ Soit g la fonction définie sur $[0, 2[$ par : $f(x) = e^{-x}g(x)$.

a Calculer $g(1)$.

b Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in [0, 2[$: $g'(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$.

c Déterminer alors l'expression de $g(x)$ et en déduire que pour tout $x \in [0, 2[$: $f(x) = \frac{e^{-x}}{2-x}$.

③ a Montrer que h est solution de (E) si et seulement si $(h - f)$ est solution de (E').

b En déduire les solutions de l'équation (E).



EXERCICE 4

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue .
On note $V(t)$ sa vitesse à l'instant t où t est exprimé en secondes et $V(t)$ en mètres par seconde. La fonction V suit la loi : $10y' + y = 30$.

① En supposant que lorsque le cycliste s'élance sa vitesse initiale est nulle montrer que $V(t) = 30(1 - e^{-0,1t})$.

② a Montrer que le mouvement est accéléré .

b Déterminer la limite de V en $+\infty$. Interpréter .

③ On suppose dans cette situation que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $V'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ ms}^{-2}$.

Déterminer à la seconde près la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée .