4-ième Sciences Expérimentales

Mathématiques

Serie d'exercices n°1

Thème: Nombres complexes

Professeur : Dhaouadi Nejib

Exercice 1

On donne le nombre complexe $z=-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}$

a. Exprimer z^2 sous forme algébrique

b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.

c. En déduire z sous forme exponentielle.

Exercice 2

1. Montrer que $(1+i)^6=-8i$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2=-8i$.

a. Déduire de 1. une solution de l'équation (E).

b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de 1. une solution de (E') : $z^3=-8i$.

Exercice 3

Linéariser le polynôme $P=\cos^2 5x\sin 3x$.

Exercice 4

a. On considère le nombre complexe $z=1-i\sqrt{3}$.

Mettre z sous forme trigonométrique. Calculer z^2 et z^3. En déduire z^{1992} et z^{1994}.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3+8=0$ (on remarquera que cette équation a une racine évidente réelle) . En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(iz-1)^3+8=0$. Donner les solutions sous forme algébrique.

Exercice 5

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant $\begin{cases} z_1\sqrt{3}-z_2=-2 \\ z_1-z_2\sqrt{3}=-2i \end{cases}$.

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre *O*, d'unité graphique 4 cm, on considère les points *A* et *B* d'affixes respectives : $z_A=-\sqrt{3}+i$ et $z_B=-1+i\sqrt{3}$.

Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle. Placer les points *A* et *B*.

3. Calculer module et argument de $\frac{z_A}{z_B}$.

En déduire la nature du triangle *ABO* et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

4. Déterminer l'affixe du point *C* tel que *ACBO* soit un losange. Placer *C*. Calculer l'aire du triangle *ABC* en cm^2.

EXERCICE 6

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Pour réaliser la figure, on prendra pour unité graphique 1 cm.

Soit P le point d'affixe p où $p = 10$ et Γ le cercle de diamètre $[OP]$. On désigne par Ω le centre de Γ.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c où $a = 5+5i$, $b = 1+3i$ et $c = 8-4i$.

1. Montrer que A, B et C sont des points du cercle Γ.
2. Soit D le point d'affixe $2+2i$. Montrer que D est le projeté orthogonal de O sur la droite (BC).

Partie B (On rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$).

A tout point M du plan différent de O, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{20}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ représente le nombre conjugué de z.

1. Montrer que les points O, M et M' sont alignés.
2. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et M un point de Δ d'affixe z. On se propose de définir géométriquement le point M' associé au point M.

a. Vérifiez que $z + \bar{z} = 4$.

b. Exprimez $z' + \bar{z}'$ en fonction de z et $\bar{z}$ et en déduire que $5(z' + \bar{z}') = z'\bar{z}'$.

c. En déduire que M' appartient à l'intersection de la droite (OM) et du cercle Γ. Placer M' sur la figure.

EXERCICE 7

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $Z^2 + Z + 1 = 0$

1. Résoudre cette équation. On note les solutions z_1 et z_2, la partie imaginaire de z_1 étant positive.

2. Vérifier que $z_2 = z_1^2$.

3. Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

4. Indiquer sur quel cercle de centre O sont situés les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2. Placer alors ces points avec précision dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

EXERCICE 8

On désigne par P le plan complexe. Unité graphique : 2 cm.

1. Résoudre l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - 2z + 4 = 0$. On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre.

Donner le module et l'argument de chacun des nombres z_1, z_2, z_1^2, z_2^2. Ecrire sous forme algébrique z_1^2 et z_2^2.

2. On considère dans le plan les points $A(1+i\sqrt{3})$, $B(1-i\sqrt{3})$, $C(-2+2i\sqrt{3})$ et $D(-2-2i\sqrt{3})$.

a. Représenter les points A, B, C et D dans le plan P. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

b. Montrer que les points O, A et D d'une part et les points O, B et C d'autre part sont alignés. Quel est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$?

c. Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Montrer que les droites AB et AC sont perpendiculaires.

Exercice 9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 8z\sqrt{3} + 64 = 0$.

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = 4\sqrt{3} - 4i$ et $b = 4\sqrt{3} + 4i$.

a. Ecrire a et b sous forme exponentielle.

b. Calculer les distances OA, OB, AB. En déduire la nature du triangle OAB.

3. On désigne par C le point d'affixe $c = -\sqrt{3} + i$ et par D le point d'affixe $d = ce^{i\frac{\pi}{3}}$.

Déterminer la forme algebrique de d.

4. On appelle G le barycentre des trois points pondérés $(O\,;\,-1)$, $(D\,;\,+1)$, $(B\,;\,+1)$.

a. Justifier l'existence de G et montrer que ce point a pour affixe $g = 4\sqrt{3} + 6i$.

b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure.

c. Montrer que les points C, D et G sont alignés.

d. Démontrer que le quadrilatère $OBGD$ est un parallélogramme.

Exercice 10

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z) = z^3 + \left(1 - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(74 - i\sqrt{2}\right)z - 74i\sqrt{2}.$$

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait

$$P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère normé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = -7 + 5i$; $z_B = -7 - 5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.

b. Placer le point C d'affixe $z_C = 1 + i$.

Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.

c. Placer le point D d'affixe $z_D = 1 + 11i$.

Calculer $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 11

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P\left(i\sqrt{3}\right)$ et $P\left(-i\sqrt{3}\right)$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = \left(z^2 + 3\right)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère normé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = i\sqrt{3}$, $z_B = -i\sqrt{3}$, $z_C = 3 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = \overline{z_C}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_C - z_B}{z_E - z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

Exercice 12

Le plan P est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ [unité graphique : 2 cm].
On considère les points I et A d'affixes respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment $[IA]$. On appelle (C) le cercle de diamètre $[IA]$.
Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit B le point d'affixe b où $b = \dfrac{1+4i}{1-2i}$. *E*crire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle (C).
2. Soit D le point du cercle (C) tel que $(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KD}) = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi$, où k est un entier relatif, et soit d l'affixe de D.

a. Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$. Donner un argument de $d + 2$.

b. En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.

c. Déterminer un réel a vérifiant l'égalité : $\dfrac{1+2ia}{1-ia} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3i\sqrt{3}}{4}$.

3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \dfrac{1+2ix}{1-ix}$. On pose $Z = \dfrac{m-1}{m+2}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.
4. Soit N un point, différent de A, du cercle (C) et n son affixe. Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2iy}{1-iy}$.

4-ième Sciences Expérimentales

Mathématiques

Correction de la Serie d'exercices n°1

Thème: Nombres complexes

Professeur : *Dhaouadi Nejib*

WWW.SIGMATHS.TK

Correction de l'exercice n° 1

a.

$$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}+i^2(2-\sqrt{2})$$

$$=2+\sqrt{2}-2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}-2+\sqrt{2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}.$$

b. $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$

c. $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow|z^2|=|z|^2=4\Leftrightarrow|z|=2,\ \arg(z^2)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow 2\arg(z)=-\dfrac{\pi}{4}[2\pi]\Leftrightarrow\arg(z)=-\dfrac{\pi}{8}[\pi].$

Sur $[-\pi;\pi[$, on aurait soit $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$, soit $z_2=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\pi\right)}=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne

$z=z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Correction de l'exercice n°2

1. Soit on développe brutalement en utilisant le binôme de Newton, soit on calcule d'abord $(1+i)^2=1+2i+i^2=2i$, ce qui donne $(1+i)^6=(2i)^3=-8i$. Une autre possiblité était de mettre $1+i$ sous forme trigonométrique : $1+i=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ d'où $(1+i)^6=\sqrt{2}^6e^{i6\frac{\pi}{4}}=8e^{i\frac{3\pi}{2}}=-8i$.

2. a. Comme $(1+i)^6=-8i$, on a $\left[(1+i)^3\right]^2=-8i$ donc $(1+i)^3$ est une solution. On peut développer et trouver $-2+2i$.

b. D'une manière générale l'équation $z^2=u$ a les deux solutions $z=\sqrt{u}$ et $z=-\sqrt{u}$, soit ici l'autre racine $z=-(1+i)^3=-(1+i)^2(1+i)=-2i(1+i)=2-2i$.

3. De la même manière on peut écrire $(1+i)^6=\left[(1+i)^2\right]^3$ donc $(1+i)^2$ est une solution de (E') (on peut simplifier et trouver $2i$).

Correction de l'exercice n°3

$$\cos 5x=\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\quad,\quad\cos^2 5x=\left(\frac{e^{i5x}+e^{-i5x}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(e^{i10x}+2+e^{-i10x})\quad,\quad\sin 3x=\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}$$

$$\cos^2 5x\sin 3x=\frac{1}{4}(e^{i10x}+2+e^{-i10x})\times\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}=\frac{1}{8i}(e^{i13x}-e^{i7x}+2e^{i3x}-2e^{-i3x}+e^{-i7x}-e^{-i13x})$$

$$=\frac{1}{8i}(e^{i13x}-e^{-i13x}-e^{i7x}+e^{-i7x}+2e^{i3x}-2e^{-i3x})$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{e^{i13x}-e^{-i13x}}{2i}-\frac{e^{i7x}-e^{-i7x}}{2i}+2\frac{e^{i3x}-e^{-i3x}}{2i}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(\sin 13x-\sin 7x+2\sin 3x)$$

Correction de l'exercice n°4

a. $z = 1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

$z^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = -2 - 2i\sqrt{3}$, $z^3 = 8e^{-i\frac{3\pi}{3}} = -8$.

Comme on tourne à chaque fois de 60°, tous les exposants multiples de 3 ramèneront sur l'axe réel (un coup positif, un coup négatif) ; tous les multiples de 3 +1 (comme 1, 4, 7, ...) seront sur la droite issue de *O* et passant par *z*, enfin tous les multiples de 3 + 2 seront sur la droite issue de *O* passant par z^2.

1992 est un multiple de 6 (3x332), on a $z^{1992} = 2^{1992}e^{-332i\pi} = 2^{1992}\Bbbk$, et

$z^{1994} = 2^{1994}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 2^{1994}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

b. $z^3 + 8 = 0$ a comme racine évidente −2 ; on factorise z + 2 : $z^3 + 8 = (z+2)(az^2 + bz + c)$ ce qui donne en développant et identifiant les coefficients : $z^3 + 8 = (z+2)(z^2 - 2z + 4)$.

Les autres racines sont alors : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$.

Pour résoudre $(iz-1)^3 + 8 = 0$ on reprend l'équation précédente avec le changement d'inconnue $Z = iz - 1$, ce qui donne les solutions en Z ; on revient en arrière pour les solutions en z.

$Z = iz - 1 \Leftrightarrow iz = Z + 1 \Leftrightarrow z = \frac{Z+1}{i} = -iZ - i$ d'où les trois solutions :

$z_0 = -i(-2) - i = i$, $z_1 = -i(1 + i\sqrt{3}) - i = \sqrt{3} - 2i$ et $z_2 = -i(1 - i\sqrt{3}) - i = -\sqrt{3} - 2i$.

Correction de l'exercice n°5

1. $\begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ z_1 - z_2\sqrt{3} = -2i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \\ -z_1\sqrt{3} + 3z_2 = 2\sqrt{3}i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z_2 = -2 + 2i\sqrt{3} \\ z_1\sqrt{3} - z_2 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = -1 + i\sqrt{3} \\ z_1 = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3} + i \end{cases}$.

2. $z_A = -\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ et $z_B = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

3. $\frac{z_A}{z_B} = \frac{2e^{i\frac{5\pi}{6}}}{2e^{i\frac{2\pi}{3}}} = e^{i\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ donc module 1 et argument $\frac{\pi}{6}$.

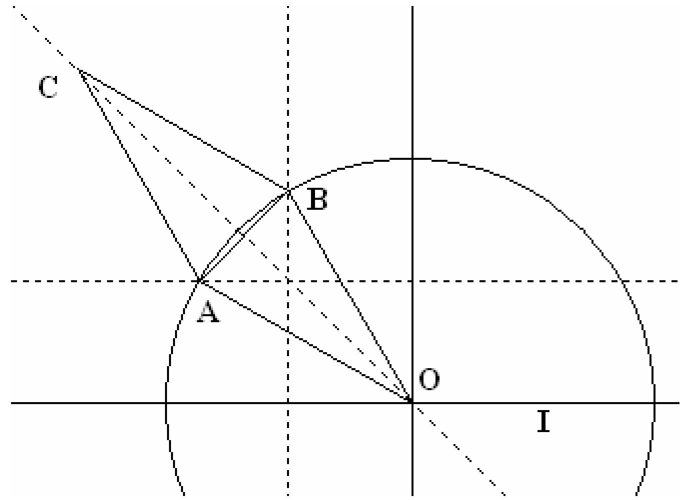
Le triangle *ABO* est isocèle en *O* puisque $|z_A| = |z_B|$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\frac{z_B}{z_A} = -\frac{\pi}{6}$.

4. On doit avoir $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$, soit

$z_C - z_A = z_B - Z_O \Leftrightarrow z_C = z_A + z_B = -1 - \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} + 1\right) = \left(\sqrt{3} + 1\right)\left(-1 + i\right)$.

L'aire du triangle *ABC* est :

$$\frac{AB}{2}\times\frac{OC}{2}=\frac{1}{4}\left|z_B-z_A\right|\left|z_C-z_O\right|$$
$$=\frac{1}{4}\left|-1+i\sqrt{3}+\sqrt{3}-i\right|\left|\left(\sqrt{3}+1\right)\left(-1+i\right)\right|$$
$$=\frac{1}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)\left|1+i\right|\left(\sqrt{3}+1\right)\left|-1+i\right|$$
$$=\frac{1}{4}\times2\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}=1,\quad \text{soit } 16\text{ cm}^2.$$



Correction de l'exercice n°6

Partie A

$a=5+5i$, $b=1+3i$ et $c=8-4i$.

1. $\Omega(5)$; $\Omega A=\left|5+5i-5\right|=5$, $\Omega B=\left|1+3i-5\right|=\left|-4+3i\right|=\sqrt{16+9}=5$ et $\Omega C=\left|8-4i-5\right|=\left|3-4i\right|=5$ donc *A*, *B* et *C* sont des points du cercle Γ.

2. On vérifie par exemple que D est sur BC, soit que $\overrightarrow{BD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$:
$\begin{vmatrix}2-1 & 8-1\\ 2-3 & -4-3\end{vmatrix}=-7+7=0$ et que $\overrightarrow{OD}$ est orthogonal à $\overrightarrow{BC}$: $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}7\\-7\end{pmatrix}=14-14=0$.

Partie B $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}$.

1. On peut écrire $z'=\dfrac{20}{\overline{z}}=\dfrac{20z}{\overline{z}z}\Rightarrow\overrightarrow{OM'}=\dfrac{20}{OM^2}\overrightarrow{OM}$, ce qui montre que les points *O*, *M* et *M'* sont alignés.

2. a. *M* a pour affixe $z=2+iy$ donc $z+\overline{z}=2+iy+2-iy=4$.

b. $z'+\overline{z}'=\dfrac{20}{\overline{z}}+\dfrac{20}{\overline{\overline{z}}}=\dfrac{20}{\overline{z}}+\dfrac{20}{z}=\dfrac{20(z+\overline{z})}{\overline{z}z}=\dfrac{80}{\overline{z}z}$; on a donc $5\left(z'+\overline{z}'\right)=\dfrac{400}{\overline{z}z}=\dfrac{20}{\overline{z}}.\dfrac{20}{z}=z'\overline{z}'$.

c. Il est clair que *M'* est sur (*OM*) puisque *O*, *M* et *M'* sont alignés. Il reste à montrer que *M'* est sur Γ, soit que

$$\left|z'-5\right|=5\Leftrightarrow(z'-5)\overline{(z'-5)}=25\Leftrightarrow(z'-5)(\overline{z}'-5)=25\Leftrightarrow z'\overline{z}'-5(z'+\overline{z}')+25=25\Leftrightarrow z'\overline{z}'=5(z'+\overline{z}')$$

Correction de l'exercice n°7

1. Une équation ultra-classique qui donne les racines $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}$.

2. $z_1^2=\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\dfrac{1-3-2i\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{2\pi}{3}}=z_2$.

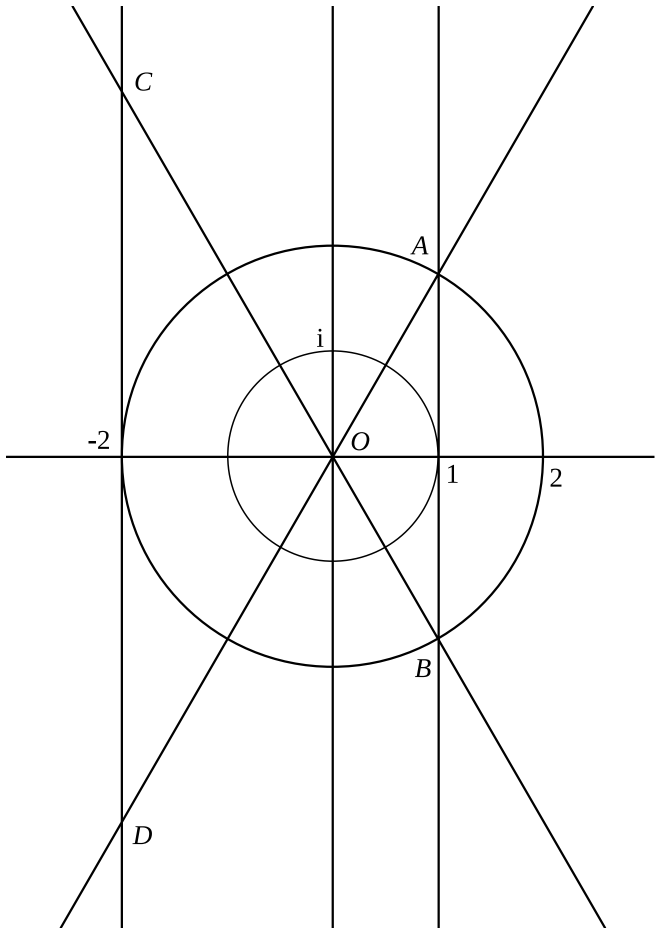
3. Déjà fait.

4. Les points en question forment un triangle équilatéral avec le point d'affixe 1 sur le cercle trigo.

Correction de l'exercice n°8

1. $z^2-2z+4=0$: les racines sont $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i\sqrt{3}$, dont le module est 2 et l'argument $\pi/3$ et $-\pi/3$. Pour les carrés on a $z_1^2=4e^{i\frac{2\pi}{3}}=-2+2i\sqrt{3}$ et $z_2^2=4e^{-i\frac{2\pi}{3}}=-2-2i\sqrt{3}$.

2. **a**. Comme on pouvait s'y attendre (enfin, des fois c'est différent…) les résultats du 1. se retrouvent comme affixes des points du 2. On fait la figure :



ABCD est un trapèze isocèle (les droites (*AB*) et (*CD*) sont verticales donc parallèles ; les points *A* et *B* étant conjugués sont symétriques par rapport à (*Ox*), même chose pour *C* et *D*.

b. Avec les arguments c'est immédiat, sinon on utilise les vecteurs : par ex. $\overrightarrow{OC}=-2+2i\sqrt{3}=-2(1-i\sqrt{3})=-2\overrightarrow{OB}$. La symétrie par rapport à l'axe réel montre que les diagonales se coupent en O.

c. $\overrightarrow{AD}=-2-2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-3-3i\sqrt{3}$ et $\overrightarrow{AC}=-2+2i\sqrt{3}-1-i\sqrt{3}=-3+i\sqrt{3}$. On peut faire le produit scalaire : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\-3\sqrt{3}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\\sqrt{3}\end{pmatrix}=9-9=0$. C'est bon.

Correction de l'exercice n°9

1. $z^2-8z\sqrt{3}+64=0$: $\Delta=64.3-4.64=-64=(8i)^2$ d'où $z_1=\dfrac{8\sqrt{3}+8i}{2}=4\sqrt{3}+4i$

ou $z_2=4\sqrt{3}-4i$.

2. **a**. $a=4\sqrt{3}-4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{-i\frac{\pi}{6}}$ et $b=4\sqrt{3}+4i$. $b=4\sqrt{3}+4i=8\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=8e^{i\frac{\pi}{6}}$.

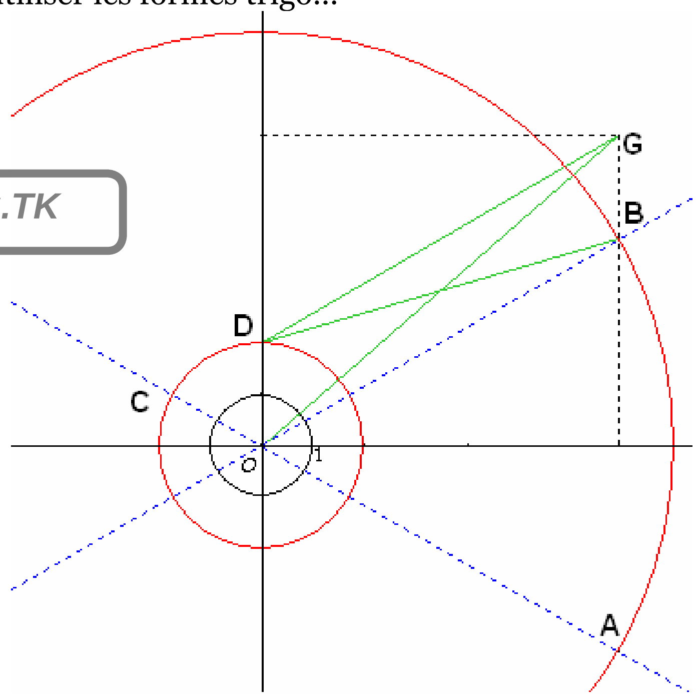
b. Il est immédiat que $OA=OB=8$; $AB=|b-a|=\left|4\sqrt{3}+4i-4\sqrt{3}+4i\right|=|8i|=8$.

OAB est équilatéral.

3. $d=e^{-i\frac{\pi}{3}}(-\sqrt{3}+i)=e^{-i\frac{\pi}{3}}2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2e^{-i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{5\pi}{6}}=2e^{i\frac{3\pi}{6}}=2i$

4. **a**. *G* : barycentre de (*O* ; −1), (*D* ; +1), (*B* ; +1) existe car la somme des coefficients n'est pas nulle. Son affixe est $z_G=\dfrac{1}{-1+1+1}(-1.z_O+1.z_D+1.z_B)=d+b=2i+4\sqrt{3}+4i=4\sqrt{3}+6i$.

b. Il faut évidemment utiliser les formes trigo…



c. *C*, *D* et *G* sont alignés : $\overrightarrow{CD}$ a pour affixe $d-c=2i-(-\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i$ et $\overrightarrow{DG}$ a pour affixe $g-d=4\sqrt{3}+6i-2i=4\sqrt{3}+4i=4(d-c)$ donc $\overrightarrow{DG}=4\overrightarrow{CD}$.

d. Appelons *K* le milieu de [*BD*], alors *G* est le barycentre de (*O* ; −1), (*K* ; 2) d'où $\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{-1+2}\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=2\overrightarrow{OK}$, donc *K* est le milieu de [*OG*]. Mêmes milieux donc parallélogramme.

Correction de l'exercice n°10

1. a. iy solution de l'équation $P(z) = 0$, soit $P(iy)=0$, soit

$$-iy^3-\left(1-i\sqrt{2}\right)y^2+\left(74-i\sqrt{2}\right)iy-74i\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left(y^2+\sqrt{2}y\right)+i\left(-y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}\right)=0.$$

Ceci donne le système $\begin{cases} y^2+\sqrt{2}y=0 \\ -y^3+\sqrt{2}y^2+74y-74\sqrt{2}=0 \end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y=0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y=-\sqrt{2}$ qui convient.

b. $P(z)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)=\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+z+74\right)$.

c. $P(z) = 0$: $z^2+z+74=0$, $\Delta=1-296=-295=i^2\times5\times59$ d'où les racines

$$z_1=i\sqrt{2},\ z_2=\frac{-1+i\sqrt{295}}{2},\ z_3=\frac{-1-i\sqrt{295}}{2}.$$

2. b. $ABCN$ parallélogramme si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NC} \Leftrightarrow z_N=z_A-z_B+z_C=7+5i-7+5i+1+i=1+11i$.

c. Calculer $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}=\dfrac{-7+5i-1-i}{1+11i+7+5i}=\dfrac{-8+4i}{8+16i}=\dfrac{(-2+i)(2-4i)}{4+16}=\dfrac{10i}{20}=\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{2}i$.

On a donc $Z=\dfrac{z_A-z_C}{z_D-z_B}$ imaginaire donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; comme $ABCD$ est un parallélogramme, c'est un losange.

Correction de l'exercice n°11

1. $P\left(i\sqrt{3}\right)=9-6\left(-i3\sqrt{3}\right)-72-i18\sqrt{3}+63=0$, $P\left(-i\sqrt{3}\right)=9-6\left(i3\sqrt{3}\right)-72+i18\sqrt{3}+63=0$.

$P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2+az+b\right)=z^4+az^3+(a+3b)z^2+3az+3b$ donc $a=-6$ et $b=21$, soit $P(z)=\left(z^2+3\right)\left(z^2-6z+21\right)$.

2. $z^2-6z+21$: $\Delta=36-84=-48=\left(i4\sqrt{3}\right)^2$, $z_1=\dfrac{6+i4\sqrt{3}}{2}=3+2i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{6-i4\sqrt{3}}{2}=3-2i\sqrt{3}$.

$P(z) = 0$ a pour racines $i\sqrt{3}$ et $-i\sqrt{3}$ ainsi que z_1 et z_2.

3. Comme A et B d'un côté, C et D de l'autre sont symétriques par rapport à l'axe $\left(O,\vec{u}\right)$, les triangles ABC et ABD ont mêmes cercles circonscrits, ils appartiennent donc au même cercle.

4. E, le symétrique de D par rapport à O a pour affixe $-z_D=-3+2i\sqrt{3}$.

$$\frac{z_C-z_B}{z_E-z_B}=\frac{3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}{-3+2i\sqrt{3}+i\sqrt{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{-1+i\sqrt{3}}=\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{1+3}=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Le triangle BEC est donc équilatéral.

Correction de l'exercice n°12

1. $b=\dfrac{1+4i}{1-2i}=\dfrac{(1+4i)(1+2i)}{1+4}=\dfrac{1+4i+2i-8}{5}=-\dfrac{7}{5}+i\dfrac{6}{5}$.

B appartient au cercle (C) si et seulement si $BK = IK = 1{,}5$:

$\overrightarrow{BK}(z_K - z_B)$ avec $z_K - z_B = -\frac{1}{2} - b = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5} - i\frac{6}{5} = \frac{9}{10} - i\frac{6}{5}$ d'où

$|z_k - z_B|^2 = \left|\frac{9}{10} - i\frac{6}{5}\right|^2 = \frac{81}{100} + \frac{36}{25} = \frac{81}{100} + \frac{144}{100} = \frac{225}{100}$ donc $BK = \frac{15}{10} = 1,5$ et B appartient au cercle (C).

2. **a**. $\overrightarrow{KD}(d + \frac{1}{2})$, $\left|d + \frac{1}{2}\right| = KD = 1,5$ car D appartient au cercle (C),

$\arg(d + \frac{1}{2}) = (\vec{u}\ ; \overrightarrow{KD}) = (\overrightarrow{KI}\ ; \overrightarrow{KD}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$.

b. On en déduit que

$d + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{3}} = \frac{3}{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$ donc $d = \frac{3}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + i\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

c.

$\frac{1+2ia}{1-ia} = \frac{1}{4} + \frac{3i\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow 4(1+2ia) = (1-ia)(1+3i\sqrt{3}) \Leftrightarrow 4 + 8ia = 1 + 3i\sqrt{3} - ia + 3a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 4 + 8ia = 1 + 3a\sqrt{3} + i(3\sqrt{3} - a) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 3a\sqrt{3} = 4 \\ 3\sqrt{3} - a = 8a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $Z = \frac{m-1}{m+2} = \frac{\frac{1+2ix}{1-ix} - 1}{\frac{1+2ix}{1-ix} + 2} = \frac{1 + 2ix - 1 + ix}{1 + 2ix + 2 - 2ix} = \frac{3ix}{3} = ix$, $|Z| = |x|$ et $\arg(Z) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

or $\arg(Z) = \arg(\frac{m-1}{m+2}) = (\overrightarrow{AM}\ ; \overrightarrow{IM})$ donc le triangle *AIM* est rectangle en *M*, ce qui signifie que le point *M* appartient au cercle (C).

4. $n = \frac{1+2iy}{1-iy} \Leftrightarrow n(1-iy) = 1 + 2iy \Leftrightarrow n - iny = 1 + 2iy \Leftrightarrow y(2i + ni) = n - 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{i}\frac{n-1}{n+2} = -i\frac{n-1}{n+2}$

car $n \neq -2$ puisque *N* est différent de *A*. Vérifions que *y* est réel [si *n* = 1 (*N* = *I*) alors on prend *y* = 0] :

$\arg y = \arg(-i\frac{n-1}{n+2}) = \arg(-i) + \arg(\frac{n-1}{n+2}) = -\frac{\pi}{2} + 2k'\pi + \frac{\pi}{2} + k''\pi = k\pi$ donc *y* est réel.