Limites et continuités
4 $^{\text{ème}}$ A

Exercice n°01 :

Calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-x^2}{2-x}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\frac{\pi}{3}}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)}$	$\lim\limits_{x\to (-2)^-}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$	$\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$
$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{1-3x}{-2x^2+x+1}}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+\cos(x)}{2-\cos(x)}$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x-2}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{1-\cos(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{1-\tan(x)}$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{E(x)}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x+1-\sqrt{1-x}}{x^2-\sqrt{x^2+2}}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\cos(x)-\sqrt{3}\sin(x)}{\pi-6x}$

Exercice n°02 :

Soient a *et* b *deux réels tel que :* $\forall\varepsilon>0\ ,\ |a-b|<\varepsilon$.
Montrer que $a=b$.

Exercice n°03 :

Soient $f(x)=E(2x)-2E(x)$ *et* $g(x)=\frac{E(2x)-E(x)}{x}$.

1. *Etudier la continuité de* f *en* 1.
2. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$.
3. *Montrer que* g *est prolongeable par continuité en* 0.

Exercice n°04 :

Soit f une fonction continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$ *tel que* $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lambda\ ;\ \lambda<1$.
Montrer que l'équation $f(x)=1$ *admet au moins une solution dans* $\mathbb{R}_+$.

Exercice n°05 :

Soit f *une fonction bornée sur* $]-1,1[$.
Calculer $\lim\limits_{x\to 0}xf(x)\left[\cos(\frac{1}{x})+\sin(\frac{2}{x})\right]$

Exercice n°06 :

Soit $h(x)=\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

1. *Montrer que* $\forall x\in\mathbb{R}^*$ *, on a :* $\left|h(x)-\frac{1}{2}\right|\leq|x|$.
2. *En déduire que* $\lim\limits_{x\to 0}h(x)$.

Exercice n°07 :

Soit $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x} - \frac{\sin(x)}{x} \ \textit{si} \ x < 0 \\ -\frac{3x}{\sqrt{x^2+3}} \ \textit{si} \ x \geq 0 \end{cases}$

1. *Déterminer* D_f.
2. *Montrer que* f *est continue sur* D_f.
3. *Calculer* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.
4. *Soit* g *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $g(x) = \frac{f\left[\left|\sin(\frac{\pi}{2}x\right|\right]}{x}$.

a) *Calculer* $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$.

b) *Montrer que l'équation* $g(x) = -\frac{1}{2}$ *admet au moins une solution* $\alpha \in [1, 2]$.