Série N°:2

(Limite Continuité)

EXERCICE N°1 :

Calculer les limites suivantes

❶ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x-2}{x^2+4x-5}$ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{3x}-3}{\sqrt{x+1}-\sqrt{3x-5}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}-\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2+7}-x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x+1}-x$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+3x+1}-x+2$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-6x^2-4x+24}{x-2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-6x^2-4x+24}{3x^3-2x+8}$

❷ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\cos x}-\sqrt{2}}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin(\dfrac{1}{x})$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\cos(\dfrac{\pi x^2-x+3}{3x^2-1})$

EXERCICE N°2 :

I/ Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^3-3x^2-9x+27}{x-3}$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 3. Donner alors ce prolongement..

II/ Soit la fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-8}{x-2} & \text{si} \quad x<2\\[2mm] \dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} & \text{si} \quad x>2\end{cases}$

1/ Déterminer la limite de f en 2, conclure.

2/ La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

EXERCICE N°3 :

Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est vraie.

Soit g et u deux fonctions donnés par :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$g(x)$	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	3	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$u(x)$	-5	↗	2	↘	-1	↗	2

1/ L'équation g(x) = 1 admet une seule solution dans :
-]-∞,-1[▪]-1,+∞[▪]-∞,2[

2/ On a : ▪ $g\circ u(2)=-1$ ▪ $g\circ u(-1)=2$ ▪ $g\circ u(-1)=3$

3/ On a : ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}g\circ u(x)=2$ ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}g\circ u(x)=3$ ▪ $\lim\limits_{x\to+\infty}g\circ u(x)=-1$

EXERCICE N°4:

Soit la fonction f définie sur IR^* par : $f(x)=\begin{cases} f(x)=x(2-\sin(\dfrac{1}{x})) & \text{si} \quad x<0\\[2mm] f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{si} \quad x>0\end{cases}$

1/ a- Vérifier que pour tout x > 0 ; $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$.

2/ a- Montrer que : ∀ x < 0, 3x ≤ f(x) ≤ x

b- Calculer alors $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$.

3/ Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 et donner son prolongement g.
4/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ .Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

EXERCICE N°5 :
Dans le graphique ci-dessous, on tracera la courbe ζ_f d'une fonction f définie sur IR\{1} et admettant : - la droite x = 1 comme asymptote verticale
- la droite (AB) comme asymptote oblique au voisinage de + ∞.
- une branche parabolique de direction (AB) au voisinage de - ∞.

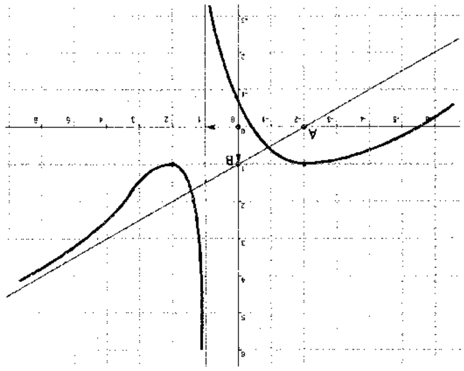
1/ Par une lecture graphique déterminer : f(]-∞,-1]) ; f(]1,3]) et f([-5,-1]) .

2/ Soit g la fonction définie sur IR\{1} par $g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$

a- Déterminer le domaine de définition de g o f.

b- Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g\circ f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} g\circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-2} g\circ f(x)$

c- g o f est-elle prolongeable par continuité en 1?
Si oui définir ce prolongement.



EXERCICE N°6 :

Soit f une fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x \le 0 \\ x^3 + 2 + x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+2x$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a- Montrer que pour x > 0, on a : $x^3 + 2 - x^2 \le f(x) \le x^3 + 2 + x^2$

b- Montrer que f est continue en 0.

c- En déduire que f est continue sur IR.

3/ a- Montrer que l'équation f(x) = 3 admet au moins une solution $\alpha \in]-1,0[$.

b- Montrer que : $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 4$ et en déduire la valeur exacte de α.

EXERCICE N°7 :
Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = x^2\sin(\dfrac{\pi}{x})+1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

1/ a- Montrer que pour tout réel x < 0, on a : $-x^2 + 1 \le f(x) \le x^2 + 1$

b- En déduire $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$.

c- Montrer que f est continue en 0.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3/ Monter qu'il existe un réel $x_0 \in]-2,-1[$ tel que $f(x_0) = 0$

4/ a- Vérifier que pour tout x ≥ 0, on a : $f(x) = -1 + \dfrac{4}{2+\sqrt{x}}$

b- En déduire que f est strictement décroissante sur [0,+∞[.

c- Déterminer alors l'image de l'intervalle [0,+∞[par la fonction f.

5/ a- Montrer que l'équation f(x) = x admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de α.

b- Montrer que : $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{2} = \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}$

NETSCHOOL1