Exercice n°1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ *et la suite u définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \dfrac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}$

1) Montrer que u est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*, on pose* $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$.

Calculer S_n *en fonction de* α *et n.*

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ *par :* $v_n = \dfrac{S_n}{n^2}$

Montrer que la suit v est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°2

Soient les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ *par :*

$$u_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

$$v_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Montrer que les suites u et v sont convergentes et déterminer la limite de la suite u (On pourra remarquer que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$*)*

Exercice n°3

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ *par :* $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°4

Soit la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par :* $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$

1°) Pour tout entier naturel non nul n , on pose $v_n = \dfrac{1}{n} u_n$

a) Montrer que (v_n) *est une suite géométrique* *b) Exprimer* v_n *en fonction de* n *et déduire que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *on a :* $u_n = \dfrac{n}{2^n}$

2°) a) En remarquant que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)^2 = n^2\left(1+\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)$ *; montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier* $n \geq 4$ *on a* $n^2 \leq 2^n$

b) Déduire alors que la suite (u_n) *est convergente et préciser sa limite.*

Exercice n°5

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ *et les deux suites u et v définies par :*

$$u_1 = a \ ; \ v_1 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*; \ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) Considérons la suite w définie sur $\mathbb{N}^*$ *par :* $w_n = u_n - v_n$.

Montrer que (w_n) *est une suite géométrique et exprimer* w_n *en fonction de a, b et n.*

2) Montrer que les suites u et v sont adjacentes.

3) Calculer, pour tout entier naturel non nul, $\dfrac{1}{2}u_n + v_n$. *Conclure.*

Exercice n°6

On considère les deux suites u et v définies par :

$$u_0 = 1 \ ; \ v_0 = -3 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*; \ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1) Trouver deux réels α *et* β *tels que les suites S et T définies pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par:*

$S_n = u_n + \alpha v_n$ *et* $T_n = u_n + \beta v_n$ *soient géométriques.*

2) Exprimer S_n *et* T_n *en fonction de n et déduire* u_n *et* v_n *en fonction de n.*

3) Déduire alors que les suites (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes et donner leurs limites.*

Exercice n°7

Soit la suite (x_n) *définie par :* $x_0 = 0$ *et* $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n; $0 \leq x_n \leq 2$

b) En déduire que (x_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

2) On pose $y_n = 2 - x_n$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N};\ y_{n+1} \leq \dfrac{y_n}{2}$.

b) Retrouver alors le résultat de 1) b)

3) On pose $x_n = 2\cos(z_n)$ *avec* $z_n \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Montrer que (z_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.*

b) Exprimer z_n *et puis* x_n *en fonction de* n.

Retrouver alors le résultat de 1) b)

Exercice n°8

Soit (u_n) *la suite réelle à termes non nuls définie par :*

$u_0 = 1$; $u_1 = \frac{1}{2}$ *et pour tout entier naturel* n , $u_{n+1}^2 = 2u_{n+2}u_n$

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on pose* $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Montrer que (v_n) *est une suite géométrique dont on précisera la raison*

2°) En déduire que pour tout entier naturel n *on a :* $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$

3°) Montrer alors que pour tout entier naturel n *on a :* $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

4°) En déduire que la suite (u_n) *est convergente et déterminer sa limite*

Correction

Exercice n°1

1) $u_{n+1} - u_n = \frac{\alpha^2 + n}{\alpha} - \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ donc u est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{\alpha}$ et de premier terme $u_1 = \alpha$.

2) $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ (somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique)

$$= \frac{n}{2}\left(\alpha + \frac{\alpha^2 + (n-1)}{\alpha}\right) = \frac{n}{2\alpha}\left(\alpha^2 + \alpha^2 + n - 1\right) = \frac{n}{2\alpha}\left(2\alpha^2 + n - 1\right).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{1}{2n\alpha}\left(2\alpha^2 + n - 1\right) = \frac{2\alpha^2 - 1}{2\alpha n} + \frac{1}{2\alpha}$.

La suite $n \mapsto \frac{2\alpha^2 - 1}{2n\alpha}$ est convergente et elle converge vers 0

Donc la suite v est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2\alpha}$.

Exercice n°2

<u>Etude de la suite (u_n)</u>

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Car $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$

Donc $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} - \left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Si vous détester le symbole $\sum$ alors vous pouvez le faire autrement:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$
$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

* $\lim \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim u_n = 1$.

Etude de la suite (v_n)

Pour tout entier $k \geq 2$ *, on a :* $\dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$.

Donc $1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} \leq 1 + \dfrac{1}{2 \times 1} + ... + \dfrac{1}{n(n-1)}$ *ou encore* $v_n \leq 1 + u_{n-1}$

D'où pour tout entier $n \geq 2$ *,* $v_n \leq 1 + 1 - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n} \leq 2$ *(ce qui est vrai pour n=1 aussi)*

Pour tout entier $n \geq 1$*,* $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ *donc la suite* (v_n) *est croissante.*

Conclusion: La suite (v_n) *est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente.*

Exercice n°3

On a : $\forall k \in \{1, 2, ..., n\}$ *;* $\sqrt{n^2+1} \leq \sqrt{n^2+k} \leq \sqrt{n^2+n}$.

Donc $$\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$

En faisant la somme membre à membre de ces n encadrements on obtient :

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$.

$$\begin{cases} \text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1 \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) *est convergente*

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice n°4

1) a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{n+1}{2n}u_n = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{n}u_n = \dfrac{1}{2}v_n$ *donc* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$.

b) $v_n = v_1.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right).\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, *pour tout entier naturel n non nul*

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = nv_n = n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{n}{2^n}$.

2) a) On note P(n) la propriété « $n^2 \le 2^n$ »

P(4) est vraie car $4^2 = 16 \le 2^4 = 16$.

Hérédité *:Soit* $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \ge 4$. *Supposons que P(n) est vraie et montrons que P(n+1) est aussi vraie.*

On a $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = n^2\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right)$ *et puisque* $n \ge 4$ *alors* $\dfrac{2}{n} \le \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ *et*

$\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{16}$ *d'où* $\dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{16} < 1$ *et alors* $n^2\left(1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}\right) \le 2^n.2 \Rightarrow (n+1)^2 \le 2^{n+1}$.

b) Pour tout entier naturel n supérieur à 4 on a : $n^2 \le 2^n$ *donc* $0 < \dfrac{n}{2^n} \le \dfrac{1}{n}$

$$\begin{cases} 0 < u_n \le \dfrac{1}{n} & \text{pour } n \ge 4 \\ \lim \dfrac{1}{n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{la suite } (u_n) \text{ est convergente et } \lim u_n = 0$$

Exercice n°5

1) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4}w_n \Rightarrow (w_n)$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{4}$ *et de premier terme* $w_1 = u_1 - v_1 = a - b$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ w_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a-b)$.

2) Remarquons que $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ w_n = u_n - v_n < 0$ *car* $a < b$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} = -\dfrac{w_n}{2} > 0$

Donc la suite (u_n) *est croissante.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{4} = \dfrac{w_n}{4} < 0$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

<u>Conclusion</u>:

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leq v_n \\ (u_n) \text{ croissante et } (v_n) \text{ décroissante} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Les suites } u \text{ et } v \text{ sont adjacentes}$$

3) $\dfrac{1}{2}u_{n+1} + v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{4} + \dfrac{u_n + 3v_n}{4} = \dfrac{2u_n + 4v_n}{4} = \dfrac{1}{2}u_n + v_n$. Donc la suite

$n \mapsto \dfrac{1}{2}u_n + v_n$ est constante et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\dfrac{1}{2}u_n + v_n = \dfrac{1}{2}u_1 + v_1 = \dfrac{1}{2}a + b$.

En plus les suites u et v sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite l.

Par passage à la limite dans l'égalité $\dfrac{1}{2}u_n + v_n = \dfrac{1}{2}a + b$, on obtient $\dfrac{3}{2}l = \dfrac{1}{2}a + b$ ce qui

donne $l = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}a + b\right) = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}b$ cqfd.

Exercice n°6

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} + xv_{n+1} = \dfrac{4+3x}{12}(u_n + xv_n) + \dfrac{8 + 5x - 3x^2}{12}$

Pour que la suite $(u + xv)_n$ soit géométrique, il suffit de poser $\dfrac{8 + 5x - 3x^2}{12} = 0$

Ce qui est équivaut à $x = -1$ ou $x = \dfrac{8}{3}$.

Ainsi, on obtient deux suites géométriques :

$S : n \mapsto u_n - v_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{4-3}{12} = \dfrac{1}{12}$

et de premier terme $S_0 = u_0 - v_0 = 4$.

$T : n \mapsto u_n + \dfrac{8}{3}v_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{4 + 3 \times \dfrac{8}{3}}{12} = \dfrac{12}{12} = 1$

et de premier terme $T_0 = -7$ (suite constante)

b) Pour tout entier naturel n, $S_n = 4\left(\dfrac{1}{12}\right)^n$ et $T_n = -7$.

D'où le système suivant:

$$\begin{cases} u_n - v_n = 4\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ u_n + \frac{8}{3}v_n = -7 \end{cases}$$

Ce système admet pour solution le couple (u_n, v_n) *tel que :*

$$u_n = -\frac{3}{11}\left(7 - \frac{32}{3}\left(\frac{1}{12}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{3}{11}\left(7 + 4\left(\frac{1}{12}\right)^n\right).$$

3) $\frac{1}{12} \in \left]-1, 1\right[$ *donc* $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{12}\right)^n = 0$

Ce qui permet de dire que les suites u et v sont convergentes et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = -\frac{21}{11}$$

Exercice n°7

1) a) Montrons ce résultat par récurrence.

Pour $n = 0$; $x_0 = 0 \in [0, 2]$

Soit $n \in \mathbb{N}$; *supposons que* $0 \le x_n \le 2$ *et montrons que* $0 \le x_{n+1} \le 2$.

$0 \le x_n \le 2 \Leftrightarrow 2 \le x_n + 2 \le 4 \Leftrightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{x_n + 2} \le 2 \Rightarrow 0 \le x_{n+1} \le 2$. *Cqfd.*

b) Pour tout entier naturel n; on a:

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 2} - x_n = \frac{x_n + 2 - x_n^{\,2}}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} = \frac{(2 - x_n)(1 + x_n)}{\sqrt{x_n + 2} + x_n} \ge 0$$

Donc la suite (x_n) *est croissante.*

La suite (x_n) *est croissante et majorée (par 2) donc elle est convergente.*

Posons $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = l$

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{avec} \quad f : x \mapsto \sqrt{x + 2} \\ \forall n \in \mathbb{N};\ x_n \in [0, 2] \\ f \text{ continue sur } [0, 2] \\ (x_n) \text{ converge vers } l \in [0, 2] \end{cases} \Rightarrow f(l) = l$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt{l + 2} = l \Leftrightarrow \begin{cases} l^2 - l - 2 = 0 \\ l \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (l - 2)(l + 1) = 0 \\ l \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow l = 2$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2$

2) a) $y_{n+1} = 2 - x_{n+1} = 2 - \sqrt{x_n + 2} = \dfrac{4 - x_n - 2}{2 + \sqrt{x_n + 2}} = \dfrac{2 - x_n}{2 + \sqrt{x_n + 2}} \leq \dfrac{2 - x_n}{2}$

(Car $2 - x_n \geq 0$ *et* $2 + \sqrt{x_n + 2} \geq 2$*)*

Donc pour tout entier naturel n; $y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n$.

b) Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N};\ y_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

(Résultat que l'on peut obtenir en faisant le produit membre à membre...)

Pour $n = 0$ *;* $y_0 = 2 - x_0 = 2 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$ *ce qui est vrai.*

Soit $n \in \mathbb{N}$ *; supposons que* $y_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ *et montrons que* $y_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

$y_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} y_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ *donc* $y_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$

D'après ce qui précède ; pour tout entier naturel n, $0 \leq y_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

Et puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ *(car* $\dfrac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$*) alors la suite* (y_n) *converge vers 0.*

Et de l'égalité $x_n = 2 - y_n$ *on peut déduire que la suite* (x_n) *converge vers 2.*

3) a) $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2} = \sqrt{2\cos(z_n) + 2} = \sqrt{2\left(\cos(z_n) + 1\right)} = \sqrt{2 \times 2\cos^2\left(\dfrac{z_n}{2}\right)}$

$$= 2\left|\cos\left(\frac{z_n}{2}\right)\right| = 2\cos\left(\frac{z_n}{2}\right) \quad \text{car } \frac{z_n}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos\left(\frac{z_n}{2}\right) > 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N};\ x_{n+1} = 2\cos\left(z_{n+1}\right) = 2\cos\left(\dfrac{z_n}{2}\right)$ *avec* z_{n+1} *et* $\dfrac{z_n}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Donc $z_{n+1} = \dfrac{1}{2} z_n$ *et par suite* (z_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et de premier terme*

$z_0 = \dfrac{\pi}{2}$ *car* $x_0 = 0 = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

b) (z_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *et de premier terme* $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Donc pour tout entier naturel n, $z_n = \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$.

D'où $x_n = 2\cos\left(z_n\right) = 2\cos\left[\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}\right]$.

La fonction cosinus est continue en 0 et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 0$ *(car* $\dfrac{1}{2} \in \left]-1, 1\right[$*)*

Donc la suite (x_n) *est convergente et* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 2\cos(0) = 2$.

Exercice n°8

1°) $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \dfrac{\dfrac{u_{n+1}^{\ 2}}{2u_n}}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{1}{2}v_n$ *donc la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$

2°) *La suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$

donc $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n v_0 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{u_1}{u_0} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *d'où pour* $n \in \mathbb{N}$ *on a :*

$v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} u_n$

3°) *<u>On peut procéder à l'aide d'un raisonnement par récurrence</u>*

* *Pour n=1 l'égalité est vraie (* $u_0 = 1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0$ *)*

* *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$, *supposons que* $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *et montrons que* $u_{n+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$

$1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n}{2} + 1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ *cqfd*

<u>Autrement</u>

$u_1 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^1 u_0$

$u_2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 u_1$

.

.

$u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u_{n-1}$

En faisant le produit des égalités précédentes , on obtient après simplification

(Simplification justifiée car la suite est à termes non nuls)

$u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+2+\ldots+n} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ *car 1+2+…+n est la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 1*

4°) $\dfrac{n(n+1)}{2} - n = \dfrac{n^2 - n}{2} \geq 0$ *pour tout entier naturel n,* *donc* $\dfrac{n(n+1)}{2} \geq n$

D'où $0 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n}$ *et comme* $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n} = 0$ *(suite géométrique de raison* $\dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$*)*

alors (u_n) *est convergente et elle converge vers 0*

نَعِيبُ زَمــــــــــانَنَا وَالعَيْبُ فِينَا وَمَا لِزَمَــــــــــاننا عَيْبٌ سِوَانَا

وَنَهجُو ذَا الزَّمَــــــــانِ بِغيرِ ذَنْبٍ وَلَوْ نَطَقَ الزَّمــــــــــانُ لَنَا هَجَانَا