

❖❖ EXERCICE 01 ❖❖

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos[\ln(x)]}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln(x) - x}{\ln^2(x) + 3} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x [\ln(x)]^3 ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[1 + \ln(x)]}{x}$$

❖❖ EXERCICE 02 ❖❖

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \ln|x| ; g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) ; h(x) = x \ln(|x|-1) ; l(x) = \frac{\cos(x)}{\ln(x^2 + 1)} + \sqrt{-|x|}$$

❖❖ EXERCICE 03 ❖❖

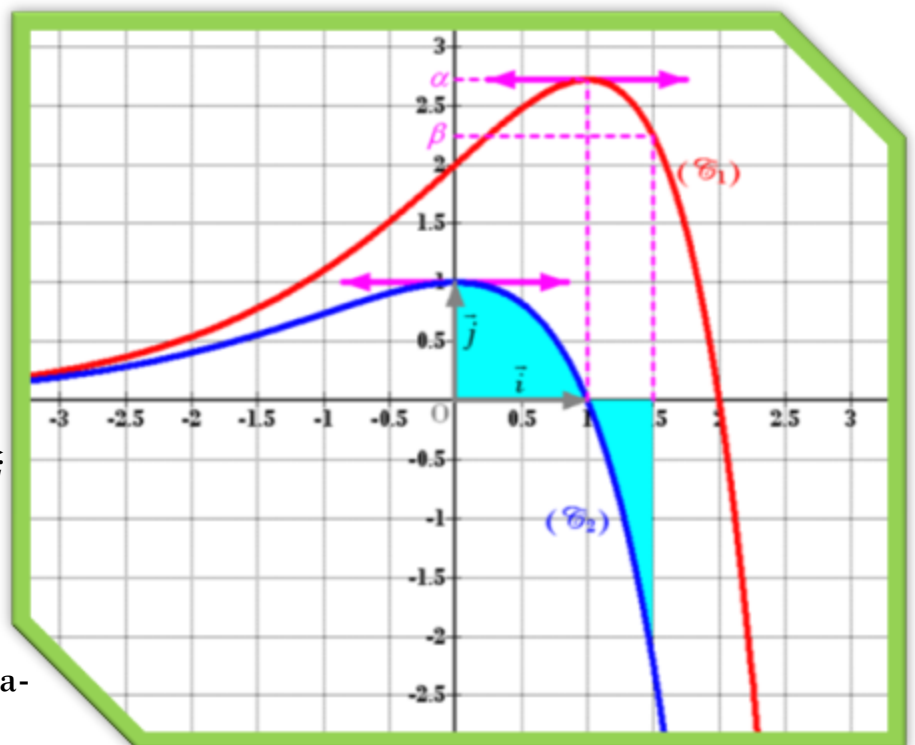
On a représenté ci-dessous deux courbes représentatives (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) d'une fonction f et de sa primitive F définie sur \mathbb{R} .

- 1- Prouver que (\mathcal{C}_2) est la courbe de f .
- 2- Calculer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$
- 3- Calculer l'aire de partie colorée.

4- Soit $G(x) = \int_0^x f(t) dt$

- a) Etudier le sens de variation de G
- b) Montrer que la représentation graphique (Γ) de G est l'image est l'image de (\mathcal{C}_1) par la translation de vecteur $-2\vec{j}$

- 5- Soit h la fonction définie par $h(x) = \ln[f(x)]$
 - a) Déterminer D_h
 - b) Dresser le tableau de variation de h .



❖❖ EXERCICE 04 ❖❖

Soit (\mathcal{C}_f) la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$ dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et on désigne par F une primitive de f sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Soit (\mathcal{C}_F) la courbe de F

Cocher la réponse juste :

1- La tangente à (\mathcal{C}_F) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation :

a) $y = 2x - 1$

b) $y = -x + 2$

c) $y = x - 1$

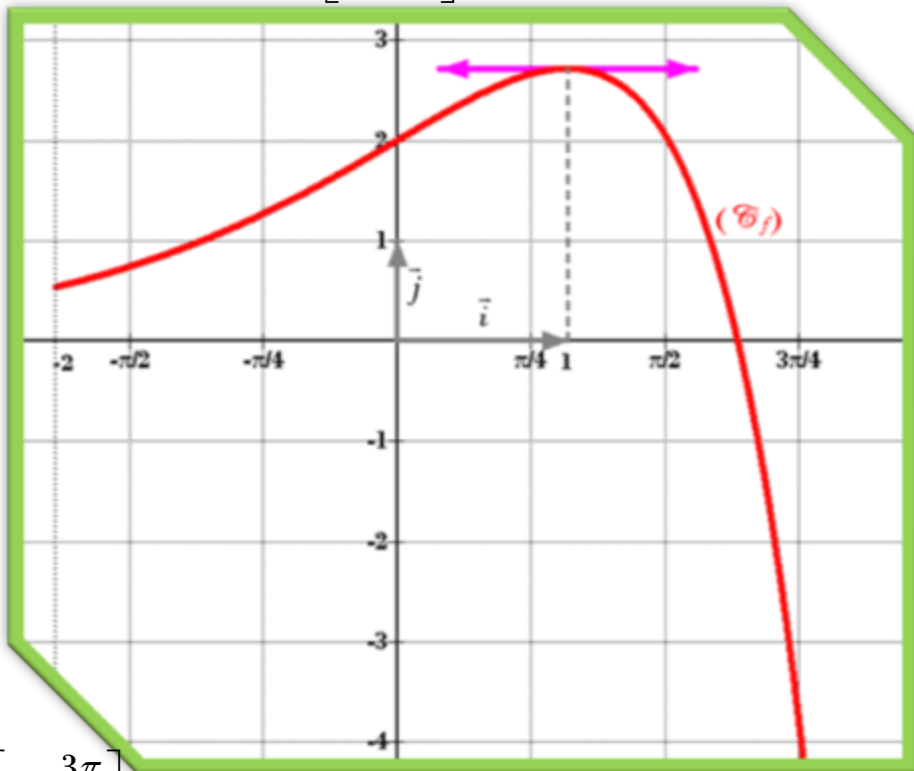
2- La courbe (\mathcal{C}_F) admet sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$

a) Deux points d'inflexions

b) Un point d'inflexion

c) Aucun point d'inflexion

3- Le tableau de variation de F sur $\left[-2, \frac{3\pi}{4}\right]$ est de la forme :



x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↗ ↘		

a)

x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↘ ↗		

b)

x	-2	2	$+\infty$
$F(x)$	↗ ↗		

c)

❖❖ EXERCICE 05 ❖❖

1- Soit f une fonction continue et impaire sur $[-2,2]$ alors $\int_{-2}^2 [\sqrt{3} + f(x)] dx$ est égale à :

- a) $4\sqrt{3}$; b) 0 ; c) $-4\sqrt{3}$

2- Soit g la fonction définie par $g(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ alors :

- a) $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; b) $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$; c) $g(x)$ change de signe sur \mathbb{R}

❖❖ EXERCICE 06 ❖❖

Soit $f(x) = \frac{1}{9-x^2}$

1- Montrer qu'il existe deux réels a et b tel que $f(x) = \frac{a}{3-x} + \frac{b}{3+x}$; $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

2- Calculer $\int_{-1}^1 f(x) dx$ puis $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2x)}{9-\cos^2(2x)} dx$

❖❖ EXERCICE 07 ❖❖

Soit $f(x) = \ln|\sqrt{x}-1|$

- 1- Déterminer D_f
- 2- Calculer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3- Etudier la dérivabilité de f sur $D_f \setminus \{0\}$ et dresser son tableau de variation.
- 4- Etudier la dérivabilité de f en 0^+ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 5- Déterminer les branches infinies de (\mathcal{C}_f)
- 6- Construire (\mathcal{C}_f)

❖❖ EXERCICE 08 ❖❖

Soit $f(x) = \begin{cases} x(1-\ln(x))^2 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1- Déterminer D_f
- 2- Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et étudier la continuité de f à droite en 0
- 3- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 4- Dresser le tableau de variation de f .
- 5- Construire (\mathcal{C}_f)

❖❖ EXERCICE 09 ❖❖

Soit $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

- 1- Déterminer D_g
- 2- Etudier la parité de g
- 3- Dresser le tableau de variation de g
- 4- Montrer que g réalise une bijection de D_g sur un intervalle I que l'on précisera.
- 5- Construire (\mathcal{C}_g) et $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

❖❖ EXERCICE 10 ❖❖

Soit $h(x) = \ln(x^2 - 3x)$

- 1- Déterminer D_h
- 2- a) Montrer que pour tout $x \in D_h$, on a : $h(3-x) = h(x)$
 b) Conclure
- 3- Etudier la dérivabilité de h sur D_h et dresser son tableau de variation.
- 4- Construire (\mathcal{C}_h) on précisons l'intersection de (\mathcal{C}_h) avec l'axe des abscisses.

❖❖ EXERCICE 11 ❖❖

Soit $\varphi(x) = x - \ln(x)$; $x \in]0, +\infty[$

- 1- a) Dresser le tableau de variation de φ
 b) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a : $\varphi(x) \geq 1$

2- Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x - \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$.
- b) La fonction f est elle dérivable à droite en 0 ?

3- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \int_1^n \frac{x}{x - \ln(x)} dx$

- a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a : $\frac{x}{x - \ln(x)} \geq 1$
- b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

❖❖ EXERCICE 12 ❖❖

La courbe ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

1-a) Dresser le tableau de variation de f

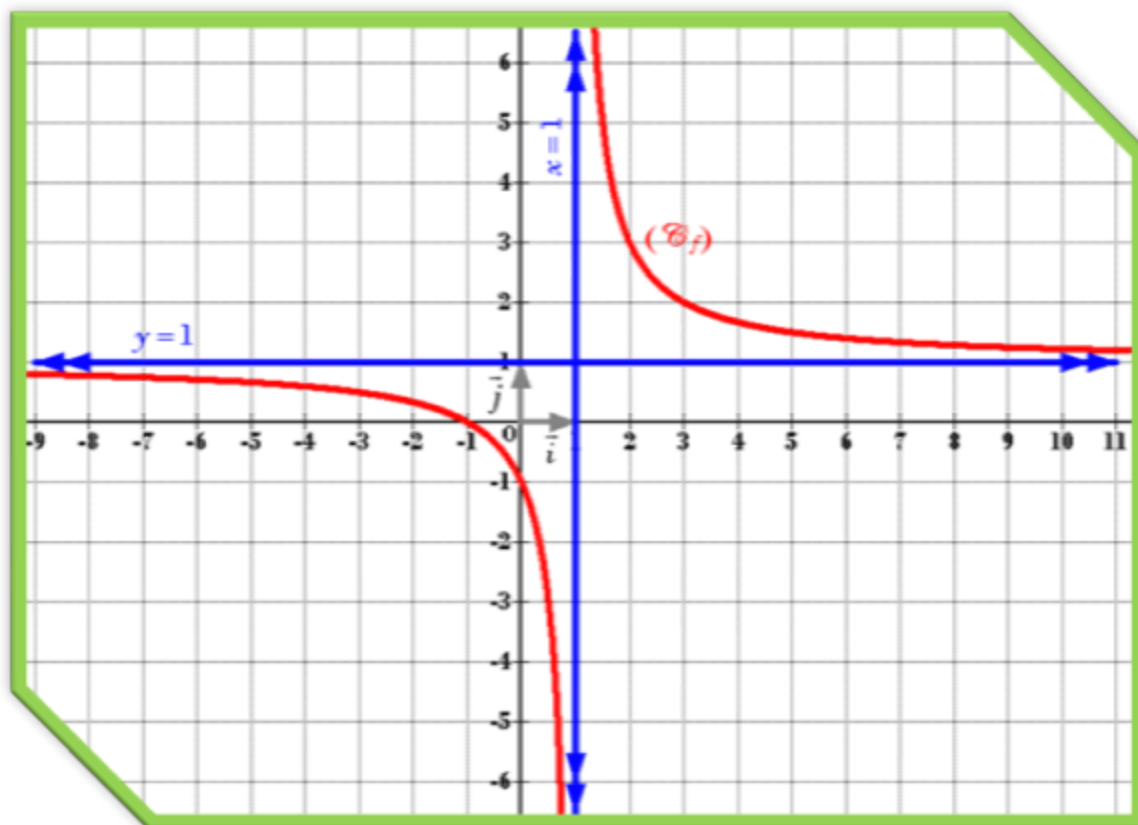
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-f(x)}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-f(x)}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{1-f(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-f(x)}$

2- Soit $g(x) = \ln[f(x)]$

a) Déterminer D_g

b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} g(x)$

c) Dresser le tableau de variation de g



❖❖ EXERCICE 13 ❖❖

Soit $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$; $x \in]-1,1[$

1- a) Etudier la parité de f

b) Montrer que f est dérivable sur $] -1,1[$ et calculer $f'(x)$

c) Etudier et représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

2- Soit \mathcal{H} l'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par (C_f) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=\frac{1}{2}$ et $y=0$. Calculer \mathcal{H}

3- Soit $g(x) = f[\sin(x)]$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que g est une primitive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\cos(t)}$

b) En déduire $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos(t)}$

4- On considère la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $J_0 = I$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{[\sin(t)]^{2n}}{\cos(t)} dt$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{1}{4^n \cos(t)} - \frac{[\sin(t)]^{2n}}{\cos(t)} \right] dt$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $K_n \geq 0$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq J_n \leq \frac{\ln(a)}{b^n}$ où a et b sont deux réels à préciser.

c) Montrer que $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.