Thème

Fonction Logarithme

Série d'exercices

Classe : $4^{ème}$ Math

Professeur

Dhaouadi Nejib

Exercice 1

1) Donner le domaine de définition de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{3x}{1 - \ln x}$ b) $f(x) = \ln\left(2x^2 - x + 3\right)$

c) $f(x) = \ln(\ln x)$ d) $f(x) = \sqrt{1 - (\ln x)^2}$

2) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

a) $\ln(2x-3) + \ln(x+1) = \ln 3$ b) $\ln|2x-3| + \ln|x+1| = \ln 3$

c) $\ln(2x-3)(x+1) = \ln 3$ d) $2\ln(2x-1) - 3\ln(1-x) = 0$

e) $\ln(2x-3) + \ln(x+1) = \ln(2x-3)(x+1)$ f) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + 3\ln x = 0$

3) Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les inéquations suivantes :

a) $\ln\left(-3x^2 + x + 2\right) \geq 0$ b) $\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right) > 0$ c) $\ln|x+1| < -\ln|3x+5|$

Exercice 2

1) Dans chacun des cas suivants, préciser le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$.

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - (\ln x)^2}$ b) $f(x) = \dfrac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$ c) $f(x) = \ln\left(\dfrac{3+x}{4-x}\right)$

d) $f(x) = \ln\left(2x - \sqrt{x+1}\right)$ e) $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

2) Déterminer les limites éventuelles suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^2 - x$ c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x^2+2\right)}{x+2}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x-3}{x}\right)$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left|\sqrt{x} - 1\right|$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat trouvé.

3) Drésser le tableau de variation de f.

4) Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion A dont – on précisera les coordonnées et l'équation de la tangente T en ce point.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ tout en précisant leurs points d'intersection avec l'axe $(O, \vec{i})$.

Exercice 6

1) Déterminer les nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{1}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

2) Calculer $I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{x \ln x}{\left(x^2+1\right)^2} dx$.

Exercice 4

On définie la suite (I_n) par : $I_0 = \int_1^e x^2 dx$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_1^e x^2 (\ln x)^n dx$.

1) Calculer I_0.

2) A l'aide d'une integration par parties, calculer I_1.

3) Montrer que pour tout entier naturel n, $3I_{n+1} + (n+1)I_n = e^3$.

4) Déduire I_3.

5) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

b) Déduire de 3) que pour tout entier naturel non nul n, $I_n \leq \frac{e^3}{n+1}$.

c) Montrer alors que (I_n) est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{2+t}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t+t^n}$.

1) Calculer u_0 et u_1.

2) Montrer que (u_n) est croissante.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t}$. En déduire que (u_n) est convergente.

4) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} dt$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln 2 - u_n \leq \frac{1}{1+n}$.

c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$.

Exercice 7

$\boxed{I}$ 1) a) En appliquant le théorème des accroissements finis sur la fonction $t \mapsto \ln(t+1)$ montrer que pour tout réel $u > 0$, $\frac{u}{u+1} < \ln(1+u) < u$.

b) Déduire que pour tout réel $x \neq 0$, $\frac{x^2}{x^2+1} < \ln(1+x^2) < x^2$. $(*)$

2) Pour $x > 1$, calculer en fonction de x $I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t(t^2+1)}$ et $J(x) = \int_1^x \frac{\ln(t^2)}{t} dt$

$\left(\text{on pourra remarquer que } \frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1} \right)$

$\boxed{II}$ On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right)}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

a) Utiliser $(*)$ pour montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \leq F(x) \leq \dfrac{1}{2}x^2$. $(**)$

b) En déduire que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{F(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$.

$\boxed{III}$ Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \dfrac{F(x)}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $G(0) = \dfrac{1}{2}$.

1) Montrer que G est paire.

2) a) Vérifier que pour $x > 0$ on a $\dfrac{G(x) - G(0)}{x} = \dfrac{2F(x) - x^2}{2x^3}$.

b) En utilisant $(*)$ et $(**)$, montrer que G est dérivable à droite en 0 et $G'_d(0) = 0$

3) a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a $G(x) = \dfrac{\ln\left(1+x^2\right) - 2F(x)}{x^3}$.

b) En déduire que pour tout réel $x > 0$ on a $G'(x) < 0$.

4) a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a : $\int_1^x \dfrac{\ln\left(1+t^2\right) - \ln\left(t^2\right)}{t}dt = F(x) - F(1) - \left(\ln x\right)^2$.

b) En utilisant l'encadrement $(*)$, montrer que pour tout réel $x > 1$ on a :

$$\ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) + \ln\left(\sqrt{2}\right) \leq \int_1^x \frac{1}{t}\ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right).$$

c) Déduire alors que $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = 0$.

5) a) Drésser le tableau de variation de G.

b) Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de G dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.