Exercice Corrigé Fonction LN

Bac Sc.
Mr Adnen Bourkhis

SERIE N 27

EXERCICE N°1

60_{11}

Soit les fonctions f et g définies sur $[0,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = x\ln x & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$ $(0,0) \in \mathcal{C}_f$ et $\begin{cases} g(x) = x^2\ln x & \text{si } x \in]0,+\infty[\\ g(0) = 0 \end{cases}$ $(0,0) \in \mathcal{C}_g$ $\quad O \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$

On désigne par (C) et (C′) les courbes respectivement de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°/ Etudier la continuité puis la dérivabilité de f et g à droite en 0.
2°/ Etudier les positions relatives de (C) et (C′).
3°/ Dresser le tableau de variation de chacune des fonctions f et g.
4°/ Construire (C) et (C′).

① • $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

• $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \underset{0}{x} \cdot \underbrace{x\ln x}_{0} = 0 = g(0)$ donc g est cont. à droite en 0

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - \overset{0}{\cancel{f(0)}}}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cancel{x}\ln x}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable en 0^+

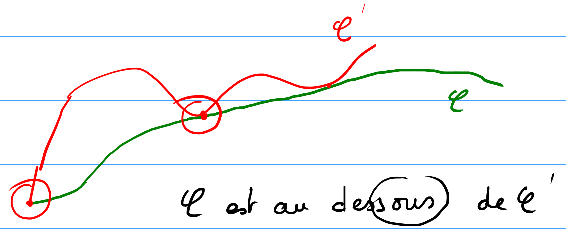
• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{\cancel{2}}\ln x}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0 = g'(0)$

$\Rightarrow$ g est dérivable à droite en 0 et $g'(0) = 0$

② Etudions le signe de $f(x) - g(x)$

$f(x) - g(x) = x\ln x - x^2\ln x = x\ln x\,(1 - x)$

x	0		1		$+\infty$
x		+		+	
$1-x$		+	0	−	
$\ln x$		−	0	+	
$f(x)-g(x)$	0	−	0	−	
P R			$\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}}$		



$\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{C}'$

Conclusion : $\mathcal{C}$ est au dessous de $\mathcal{C}'$ sur $[0,+\infty[$

$\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{A(0,0)\,;\,B(1,0)\}$

3 • $f(x) = x \ln x$

$\boxed{f \text{ est dérivable sur}}$ $]0,+\infty[$

et $f'(x) = \ln x + \cancel{x} \times \frac{1}{\cancel{x}} = 1+\ln x$ $(uv)' = u'v+uv'$

$1+\ln x \geqslant 0$ ssi $\ln x \geqslant -1$

$\Leftrightarrow e^{\ln x} \geqslant e^{-1}$

$1+\ln\left(\frac{1}{e}\right) = 1-\ln e^{1} = 1-1 = 0$

$\Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{e}$

$\ln e^x = x$

x	0		$1/e \simeq 0{,}37$		$+\infty$
$f'(x) = 1+\ln x$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e} \simeq -0{,}37$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) = x \ln x$ $\nearrow$ $\ln 1 - \ln e$

$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right)$

$= \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x \ln x$

$= +\infty$

• $g(x) = x^2 \ln x$ g est dérivable sur $[0,+\infty[$

et $g'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = \underset{\sim}{x}\,\underbrace{(2\ln x + 1)}$

$2\ln x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2\ln x \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x \geqslant e^{-1/2}$

$\ln(e^x) = x$

$(e^a)^b = e^{a\times b}$

x	0		$e^{-1/2} \simeq 0{,}6$		$+\infty$
$2\ln x+1$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e} \simeq -0{,}2$	$\nearrow$	$+\infty$

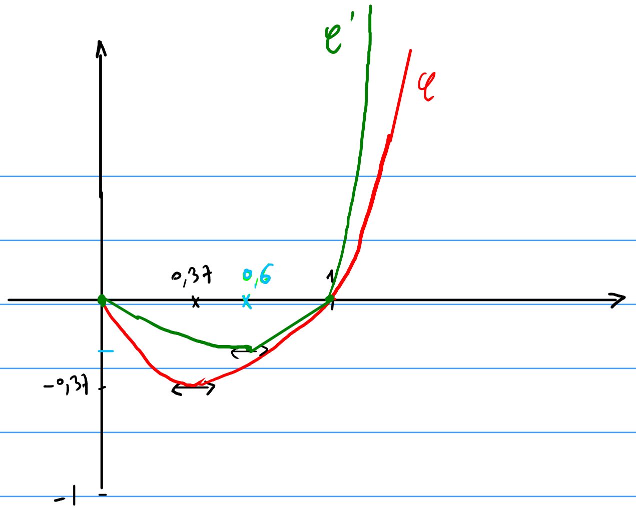
$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = +\infty$

$g\left(e^{-1/2}\right) = \left(e^{-1/2}\right)^2 \times \ln\left(e^{-1/2}\right)$

$= e^{-\frac{1}{2}\times 2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} \times e^{-1} = -\frac{1}{2e}$



$f(1) = 1 \times \ln 1 = 0$

x	0		$e^{-1/2} \simeq 0,6$		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2e} \simeq -0,2$	$\nearrow$	$+\infty$

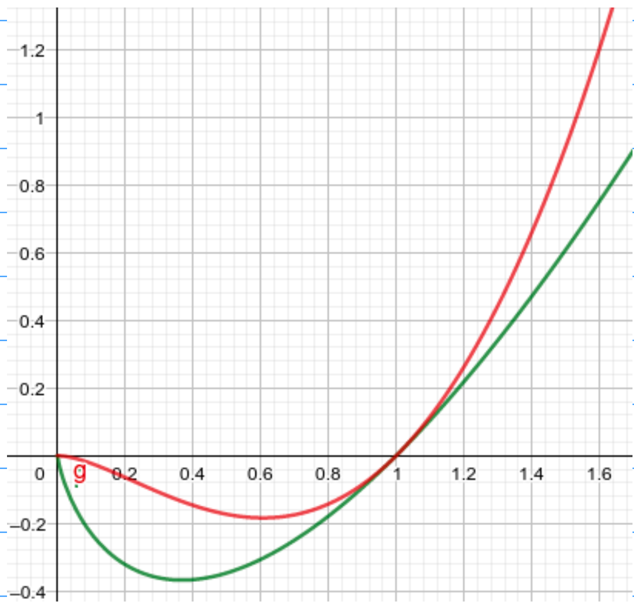
Montrer que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique au $V(+\infty)$ dont on déterminera la direction.

x	0		$1/e \simeq 0,37$		$+\infty$
$f'(x) = 1 + \ln x$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{1}{e} \simeq -0,37$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \ln x}{\cancel{x}} = +\infty.$$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet une B-P au $V(+\infty)$ de direction $(O, \vec{j})$.



Fonctions exponentielles

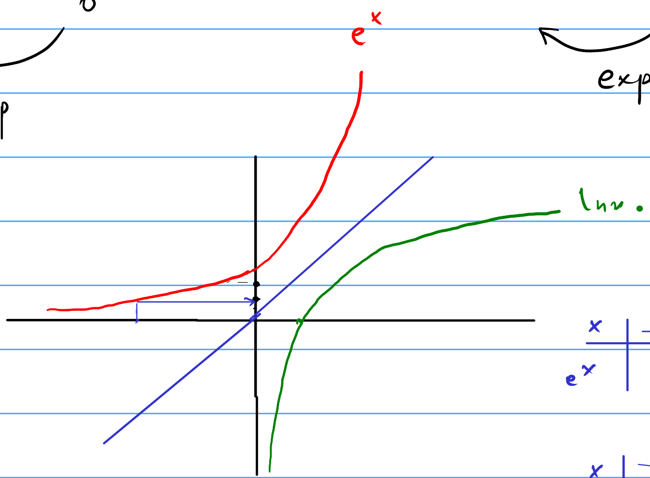
$$\exp(x) : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$$
$$x \longmapsto e^x$$

$x \mapsto e^x$ est la réciproque de $x \mapsto \ln x$

$$e^{\ln(x)} = x$$

$$x \xrightarrow{\ln} \ln x \xrightarrow{\exp} x$$

$$1 \xrightarrow{\ln} 0 \xrightarrow{\exp} 1 \qquad e \xrightarrow{\ln} 1 \xrightarrow{\exp} e \qquad e^1 = e$$



$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$
$$\begin{cases} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x		$+$	

x	$-\infty$	$+\infty$
e^x	0 ↗	$+\infty$

$$(e^x)' = e^x$$
$$\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) e^{u(x)}$$

$$e^a e^b = e^{a+b} \qquad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad (e^a)^b = e^{ab} \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

- $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$?

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f'(0) = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = f'(0) = 1$$

- $\lim_{x \to -\infty} x e^x = \lim_{X \to +\infty} -X \cdot e^{-X} = \lim_{X \to +\infty} -\frac{X}{e^X}$

On pose $X = -x$; $x = -X$
$x \to -\infty$
$X \to +\infty$.

$$= \lim_{X \to +\infty} - \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$$

$\frac{e^X}{X} \longrightarrow +\infty$

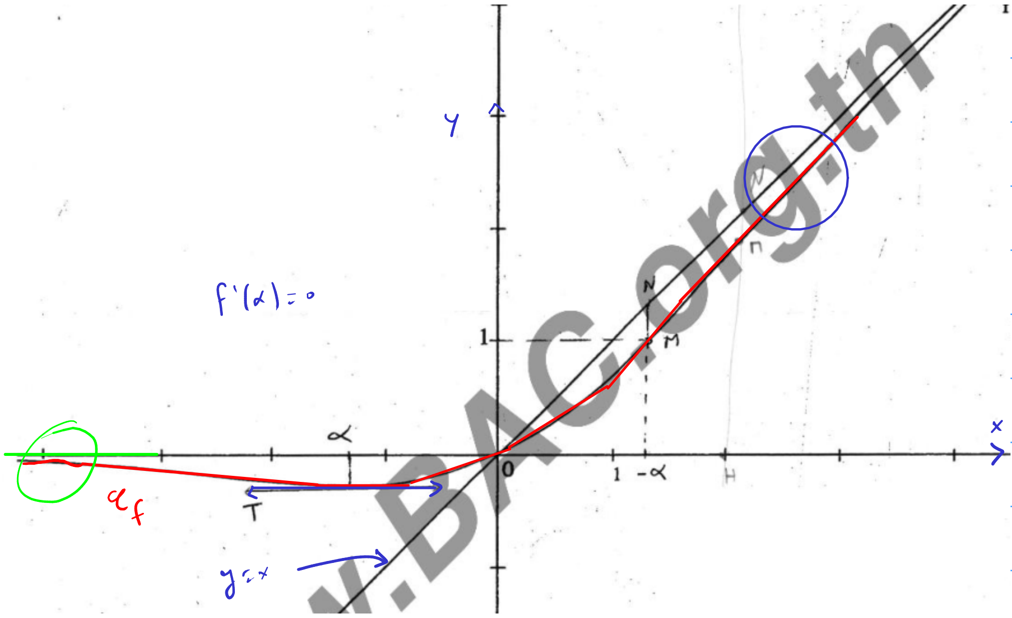
Exercice 3 (8 points)

Dans l'annexe ci-jointe, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^x}$.

La droite D d'équation $y = x$ et l'axe des abscisses sont des asymptotes à $\mathscr{C}$.

On admet que $\mathscr{C}$ admet une seule tangente horizontale T.

1. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + xe^x + e^x}{(e^x+1)^2}$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax+b) = 0$

$f(x) = \dfrac{xe^x}{1+e^x}$ (u / v) CE : $1+e^x \neq 0 \iff e^x \neq -1$ vérifié pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u(x) = xe^x \longrightarrow u'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$

$v(x) = 1+e^x \longrightarrow v'(x) = e^x$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x).(1+e^x) - xe^x.e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{(e^x + xe^x)(1+e^x) - xe^{2x}}{(1+e^x)^2}$$

$$= \frac{e^x + e^{2x} + xe^x + \cancel{xe^{2x}} - \cancel{xe^{2x}}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^{2x} + xe^x + e^x}{(1+e^x)^2}$$

$f_1(x) = e^{x^2+3x}$ $f_1'(x) = (2x+3)\,e^{x^2+3x}$ $(e^u)' = u'e^u$