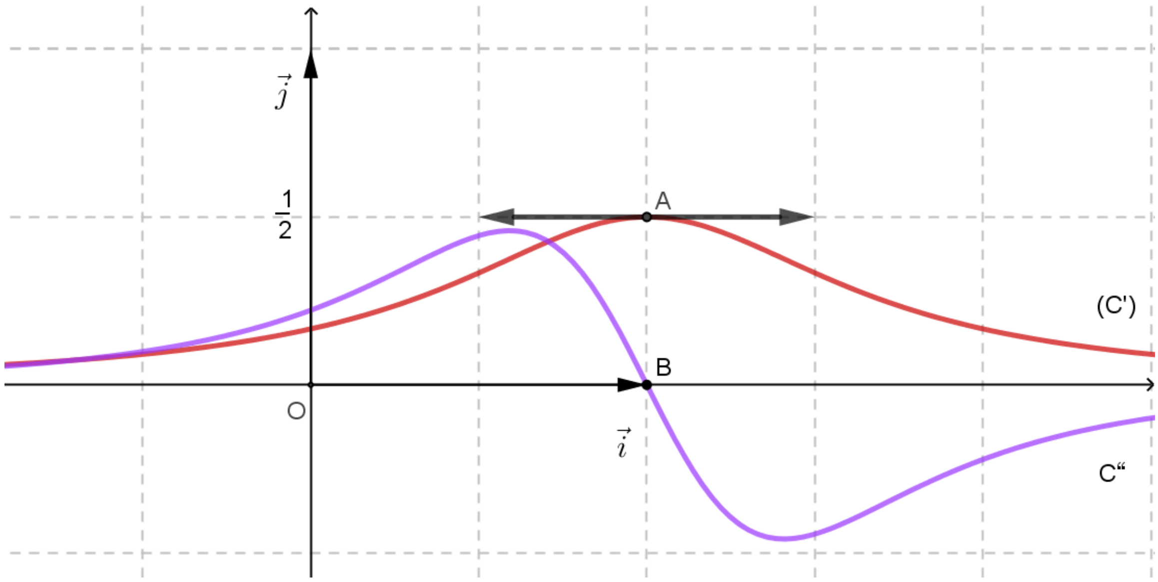
série : Dérivabilité

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par (C) la courbe représentative d'une fonction g deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et tangente à la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$ au point I d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Dans la figure ci-dessous, on a représenté la courbe (C') de la fonction dérivée g' de la fonction g et (C'') la courbe de g''.



(C') admet une tangente horizontale au point $A\left(1, \frac{1}{2}\right)$ et la droite des abscisses est une asymptote à (C').

(C'') coupe l'axe des abscisses au point B(1, 0) et la droite des abscisses est une asymptote à (C'').

1. Donner $g\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion que l'on précisera.
4. Montrer que pour tout réel x, $\left|g(x) - \frac{3}{2}\right| \leq \frac{1}{2}|x-1|$.

série : Dérivabilité

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 9}{2u_n}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+9}{2x}$.

1) a- Etudier le sens de variation de f.

b- Montrer que pour tout $x \in \left[\dfrac{9}{4}, 6\right]$, $|f'(x)| \leq \dfrac{8}{9}$.

c- En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{9}{4}, 6\right]$, $|f(x) - 3| \leq \dfrac{8}{9}|x - 3|$.

2) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\dfrac{9}{4} \leq u_n \leq 6$

3) a- Montrer que pour tout entier naturel n, $(u_{n+1} - 3)$ et $(u_n - 3)$ sont de signe contraires.

b- En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{2n} \leq 3 \leq u_{2n+1}$.

4) Montrer que si la suite (u_n) est convergente alors sa limite est égale à 3.

5) a- Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $|u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{8}{9}|u_n - 3|$.

b- En déduire que pour tout entier naturel non nul n, $|u_n - 3| \leq 3\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}$.

c- Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 3

On considère la suite réelle (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. On pose pour tout x de $[0, 2]$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{3}{4}x^2 + 1}$.

   a) Vérifier que pour tout x de $[0, 2]$, $f'(x) = \dfrac{3}{4}\dfrac{x}{\sqrt{\dfrac{3}{4}x^2 + 1}}$.

   b) Montrer que pour tout x de $[0, 2]$, $x \leq \sqrt{\dfrac{3}{4}x^2 + 1}$.

série : Dérivabilité

c) En déduire que pour tout x de [0, 2], $\dfrac{2+x}{2+\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}} \leq 1$.

d) Montrer que pour tout x de [0, 2] , $0 \leq 2-f(x) \leq \frac{3}{4}(2-x)$.

2. a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < 2$.

b) En utilisant la question 1.b, montrer que la suite (u_n) est monotone ; en déduire que la suite (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite ℓ .

3. a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq 2-u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(2-u_n)$.

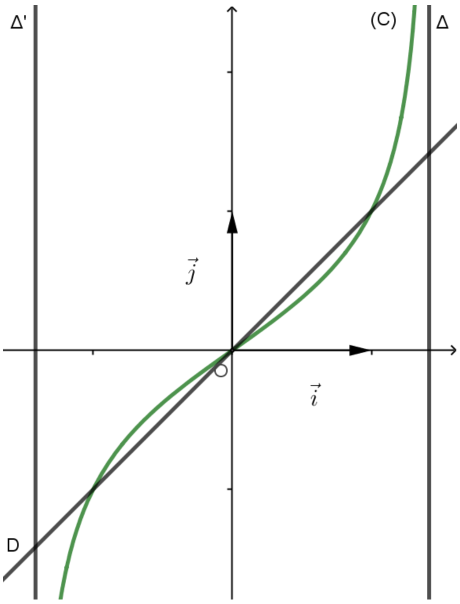
b) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq 2-u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$; puis calculer alors ℓ.

4. On note pour tout entier $n > 0$, $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$.

Montrer que pour tout entier $n > 0$, $2n-4\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \leq S_n \leq 2n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 4

Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, (C) est la représentation graphique de la fonction f définie sur $\left]-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$ et (D) est la droite d'équation y = x.



1. Utiliser le graphique pour répondre aux questions suivantes.

a) Donner une équation de chacune des asymptotes Δ et Δ′ à la courbe (C).

b) Donner le sens de variations de f.

série : Dérivabilité

2. a) Résoudre dans $\left]-\sqrt{2},\sqrt{2}\right[$ l'équation $f(x) = x$.

b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ lorsque x décrit l'intervalle $[0,1]$.

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

3. a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

4. a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right) u_n$.

b) Montrer alors que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)^n$.

c) Déterminer la limite de (u_n).