

**Exercice n°1 :**

Dans un plan complexe  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $i$  et  $i\sqrt{3}$ . A tout point  $M$  du plan d'affixe  $z$  ( $z \neq i\sqrt{3}$ ) on associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  défini par  $z' = \frac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$ .

- 1) Dans cette question, on prend  $z=1$ 
  - a. Donner la forme algébrique de  $z'$
  - b. Donner la forme trigonométrique de  $z'$ . En déduire les valeurs de  $\cos \frac{\pi}{12}$  et  $\sin \frac{\pi}{12}$
- 2) Déterminer l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan  $P$  tels que :  $|z'|=1$ .
- 3) On suppose que  $z \neq i$  et  $z \neq i\sqrt{3}$ 
  - a. Montrer que  $(\overline{u; OM'}) = (\overline{BM; AM}) = [2\pi]$
  - b. En déduire l'ensemble  $F$  des points  $M$  du plan  $P$  tels que  $z'$  soit un réel strictement négatif.

**Exercice n°2 :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on donne les points  $A(-i)$  et  $B(i)$ . Soit  $f$  l'application :  $P \setminus \{A\} \rightarrow P; M(z) \rightarrow M'(z')$  tel que  $z' = \frac{z-i}{z+i}$

- 1) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $z'$  est réel.
- 2) Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $|z'|=1$ .
- 3) a/ Vérifier que  $(z'-1)(z+i)=-2i$   
b/ Montrer que si  $M \in \zeta_{(A,i)}$  alors  $M'$  appartient à un cercle  $\zeta'$  que l'on caractérisera.
- 4) On pose  $z=e^{i\theta}$  avec  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ 
  - a/ Vérifier que  $e^{i\theta} - i = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$  et que  $e^{i\theta} + i = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$

**Exercice n°3 :**

Dans un plan complexe  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $M'$  et  $M''$  d'affixes respectives  $z'=1+ie^{i\theta}$  et  $z''=1-e^{i\theta}$  avec  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

- 1) Ecrire  $z'$  et  $z''$  sous forme exponentielle.
- 2) Calculer  $\frac{z''}{z'}$  en déduire que  $OM'M''$  est un triangle rectangle.
- 3) Déterminer  $\theta$  pour que  $OM'M''$  soit isocèle.

### Exercice n°4 :

Le plan complexe  $P$  est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on désigne par  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+i}{4}\right) e^{i\theta}$  et  $z_2 = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{4}\right) e^{i\theta}$

a/ Montrer que les points  $M_1$  et  $M_2$  appartiennent à un même cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon.

b/ Montrer que  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

c/ En déduire que  $OM_1M_2$  est un triangle équilatéral.

### Exercice n°5 :

Dans le plan complexe  $P$  rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  on considère les points  $I$  et  $A$  d'affixes respectives 1 et  $i$ . Soit  $z$  un nombre complexe différent de 1, on désigne par  $M$  le point d'affixe  $z$  et par  $M'$  le point d'affixe  $z' = \frac{iz}{z-1}$

- 1) Déterminer les points  $M$  pour lesquels  $z' = z$
- 2) Déterminer l'ensemble  $(\mathcal{I})$  des points  $M$  tel que les vecteurs  $\overrightarrow{OM}$  et  $\overrightarrow{OM'}$  sont colinéaires
- 3) Montrer que  $AM' \times IM = 1$  puis déterminer l'ensemble des points  $M'$  lorsque  $M$  décrit le cercle trigonométrique de centre  $I$ .
- 4) On prend  $z = e^{i\theta}$  ou  $\theta$  est un réel de l'intervalle  $]0, 2\pi[$

a/ Montrer que  $z' = \frac{1}{2\sin(\frac{\theta}{2})} e^{i\frac{\theta}{2}}$     b/ Déterminer  $\theta$  pour que  $|z'| = 1$ .

### Exercice n°6 :

a/ Montrer que  $3-i$  est une racine carrée de  $8-6i$

b/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_1) : z^2 - (5+3i)z + 2+9i = 0$

c/ En déduire les solutions de l'équation  $(E_2) : z^2 - (5-3i)z + 2-9i = 0$

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On donne les points  $A$ ;  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = -i$ ;  $b = 1+2i$  et  $c = 4+i$ .

a/ Placer les points  $A$ ;  $B$  et  $C$     b/ Ecrire la forme exponentielle du nombre complexe  $\frac{c-b}{a-b}$

c/ En déduire que  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $B$ .

3) Soit l'équation  $(E_3) : iz^3 - (2+5i)z^2 + (4+5i)z + 2-9i = 0$

a/ Montrer que l'équation (E<sub>3</sub>) admet une solution imaginaire que l'on précisera.

b/ Résoudre dans C l'équation (E<sub>3</sub>)

### Exercice n°7 :

Soit  $\theta$  un réel de l'intervalle  $\left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$  et (E<sub>0</sub>) l'équation :  $z^2 - 2(i + \cos\theta)z + 1 + 2ie^{-i\theta} = 0$

- 1) a/ Vérifier que  $z_1 = e^{-i\theta}$  est une solution de (E<sub>0</sub>).  
b/ Déterminer alors l'autre solution  $z_2$  de (E<sub>0</sub>)
- 2) Soit A, B et C les points d'affixes respectives :  $a=i$  ;  $b=e^{-i\theta}$  et  $c=2i+e^{i\theta}$ .  
a/ Vérifier que C-a et b-a sont conjugués  
b/ Ecrire sous forme exponentielle : c-a  
c/ En déduire la valeur de  $\theta$  pour que le triangle ABC soit équilatéral.

### Exercice n°8 :

- 1) Résoudre dans C l'équation :  $z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0$  avec  $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2} \right[$
- 2) Soit l'équation (E) :  $z^3 - 4z^2 + (5 + e^{2i\theta})z - 2(1 + e^{2i\theta}) = 0$   
a/ Vérifier que 2 est une solution de (E)    b/ Résoudre dans C l'équation (E)
- 3) Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  ; on donne les points M<sub>1</sub> ; M<sub>2</sub> et M<sub>3</sub> d'affixes respectives  $z_1 = 1 - ie^{i\theta}$  ;  $z_2 = 1 + ie^{i\theta}$  et  $z_3 = 2$   
a/ Montrer que  $z_1 = 2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$  et  $z_2 = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$   
b/ Montrer que OM<sub>1</sub>M<sub>3</sub>M<sub>2</sub> est un rectangle    c/ Déterminer  $\theta$  pour que OM<sub>1</sub>M<sub>2</sub>M<sub>3</sub> soit un carré.

### Exercice n°9 :

On considère dans C l'équation (E) :  $iz^2 + 2\sin\theta z - 2i(1 + \cos\theta) = 0$  où  $\theta \in ]-\pi ; \pi[$

- 1) Vérifier que  $\sin^2\theta - 2(1 + \cos\theta) - [i(1 + \cos\theta)]^2$ . Résoudre alors l'équation (E)
- 2) Dans le plan complexe P qui est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points M et M' d'affixes respectives  $z' = -(1 + e^{-i\theta})$  ;  $z'' = 1 + e^{i\theta}$ .  
a/ Ecrire  $z^1$  et  $z^2$  sous forme exponentielle. En déduire que  $\frac{z}{z'} = e^{i(\pi - \theta)}$   
b/ En déduire que le triangle OM'M' est isocèle.  
c/ Déterminer les valeurs  $\theta$  pour lesquelles le triangle OM'M' soit équilatéral.

### Exercice n°10 :

Soit dans C l'équation (E) :  $z^2 - (1 - i)e^{i\alpha}z - ie^{i2\alpha} = 0$  où  $\alpha \in [0, \pi]$ .

- 1) Résoudre dans C l'équation (E)

- 2) Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ . On considère les points A ; M et M' d'affixes respectives  $1-i$ ,  $e^{i\alpha}$  et  $-ie^{i\alpha}$ . Déterminer  $\alpha$  pour que les points A ; M et M' soient alignés.

### Exercice n°11 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

A tout point M( $Z \pm i$ ), on associe le point M'( $Z'$ ) tel que :  $Z' = \frac{Z+2i}{1-iZ}$  et soient les points B et C d'affixes respectives  $(-i)$  et  $(-2i)$

- 1) a/ Vérifier que pour tout  $Z \pm i$  on a :  $-iZ' = \frac{Z+2i}{Z+i}$   
 b/ En déduire l'ensemble des points M( $Z$ ) tels que  $Z'$  soit réel.
- 2) a/ Montrer que  $|Z'| = \frac{CM}{BM}$   
 b/ En déduire l'ensemble des points M( $Z$ ) lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique
- 3) Soit  $W = \frac{Z'-i}{Z-i}$  avec  $Z \pm i$  et  $Z \pm i$ .  
 a/ Vérifier que pour tout nombre complexe Z :  $(Z-i)(1-iZ) = -i(Z^2+1)$ .  
 b/ En déduire que  $W = \frac{-1}{Z^2+1}$
- 4) On pose  $Z = e^{i\theta}$  ;  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$   
 a/ Vérifier que  $W = \frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$   
 b/ En déduire en fonction de  $\theta$  le module et un argument de W.