

Nombres Complexes

Mr Chortani

Exercice 1

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1) (O, \vec{u}, \vec{v}) est un repère orthonormé direct du plan et (C)

le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$

1) Soit A le point d'affixe $a = (\sqrt{2} + i\sqrt{3})$ et θ un argument de a

a) Montrer que A appartient au cercle (C)

b) Placer le point A

2) Soit dans C l'équation (E): $z^2 - 2az + 2a^2 = 0$

a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est que $\Delta = -4a^2$

b) En déduire que les solutions de l'équation (E) sont

$$b = (1 + i)(\sqrt{2} + i\sqrt{3}) \text{ et } c = (1 - i)(\sqrt{2} + i\sqrt{3})$$

d) Ecrire en fonction de θ sous forme exponentielle les nombres complexes, a , b et c

3) Soient B et C les points d'affixe respectives b et c

a) Vérifier que A est le milieu du segment [BC]

b) Montrer que OAB est un triangle rectangle isocèle en A

c) Placer alors les points B et C

d) Calculer l'aire du triangle OBC

4) Soit $d = \frac{1}{2}bc$ et D le point d'affixe d

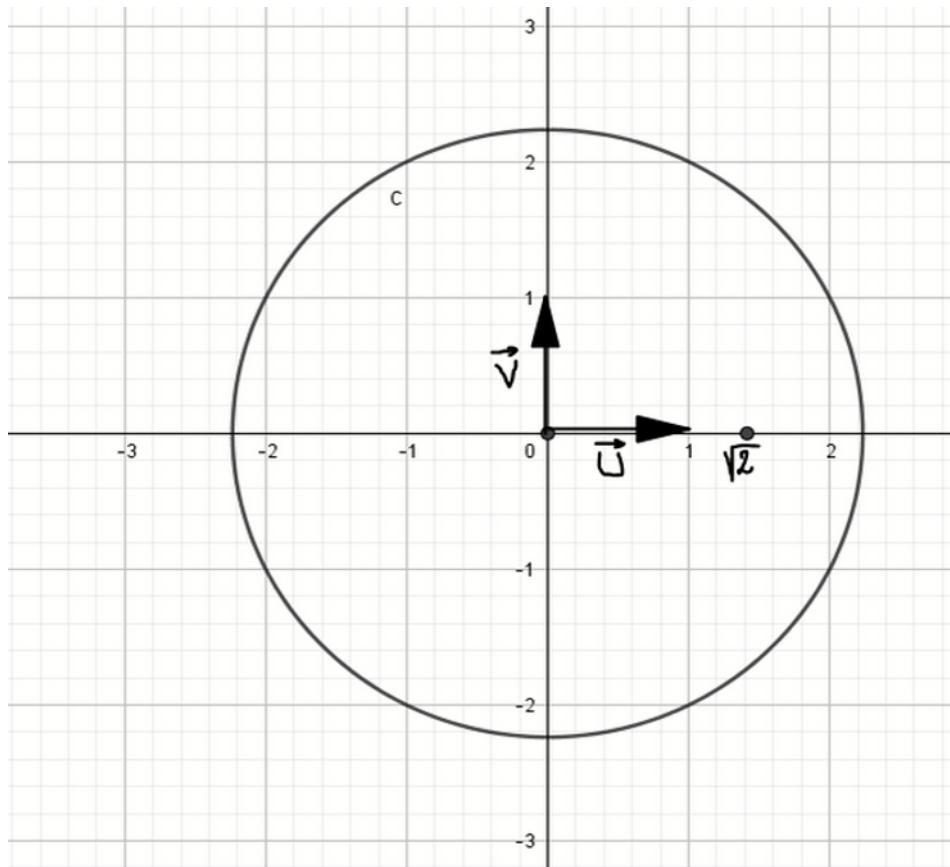
a) Vérifier que $d = a^2$

b) Montrer que $OD = 5$ et que $(\vec{u}, \overrightarrow{OD}) \equiv 2\theta[2\pi]$

c) Placer le point D.

5)a) Ecrire d sous forme algébrique

b) En déduire que $\cos(2\theta) = \frac{-1}{5}$ et $\sin(2\theta) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$



Exercice 2

Soit a un nombre complexe différent de 1

On considère dans \mathbb{C} l'équation (E) : $2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$

1)a) Vérifier que le discriminant de (E) est $\Delta = -4(a-1)^2$

b) En déduire que les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{a-1}{2}(1-i)$ et $z_2 = \frac{a-1}{2}(1+i)$

2) Dans la suite de l'exercice on prend $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$

a) Montrer que $a-1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Déduire alors les formes trigonométriques de z_1 et z_2

3)a) Vérifier que $z_1 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$

b) En déduire les valeurs exactes de $\sin \frac{5\pi}{12}$ et $\cos \frac{5\pi}{12}$

4) Le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$

On considère les points A, M_1 et M_2 d'affixes respectives $e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_1$ et z_2

a) Vérifier que $z_1 + z_2 = a-1$ et $\frac{z_2}{z_1} = i$

b) En déduire que $OM_1 \perp OM_2$ est un carré

c) Placer alors dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points A, M_1 et M_2

6) Soit $\mathcal{C} = \{M(z) \in P \text{ tel que } \frac{z-z_1}{z-z_2} \text{ est imaginaire}\}$

Montrer \mathcal{C} est le cercle de diamètre $[OA]$ privé du point M_2

Exercice 3

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - (1+i)z + i = 0$
- 2) Soit θ un réel de l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ on considère l'équation (E): $z^2 - 2e^{i\theta} \cos \theta z + e^{2i\theta} = 0$
 - a) Vérifier que 1 est une solution de (E).
 - b) En déduire l'autre solution de E.
- 3) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B et C d'affixes respectives : $1, e^{i\theta}$ et $1 + e^{i\theta}$.
 - a) Déterminer l'ensemble des points B quand θ varie dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$
 - b) Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.
 - c) Déterminer le réel θ pour que la mesure de l'aire de losange OACB soit égale à $\frac{1}{2}$.

Exercice 4

- 1) Écrire les nombres complexes $\alpha = 1+i$ et $b = -\sqrt{2}(1+i\sqrt{3})$ sous forme exponentielles.
- 2) Soit l'équation (E) : $2z^2 - \sqrt{2}(1+i\sqrt{3})z + (-1+i\sqrt{3}) = 0$
 - a) Calculer le discriminant Δ de l'équation (E).
 - b) Vérifier que : $4 - 4i\sqrt{3} = \left(2(1-i)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^2$ et que $b = -2(1+i)e^{i\frac{\pi}{12}}$
 - c) Déterminer les solutions de (E).
- 3) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectifs $z_A = e^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_B = ie^{i\frac{\pi}{12}}$, $z_C = 1+i$ et $z_D = z_A + z_B$
 - a) Écrire z_D sous forme exponentielle puis placer dans le repère les points C et D.
 - b) Montrer que le triangle OAB est isocèle et rectangle en O.
 - c) Déduire que OADB est un carré.
 - d) Vérifier que A et B appartiennent au même cercle de centre O dont on précisera son rayon.
 - e) Construire dans le même repère les points A et B en expliquant votre méthode.

Exercice 5

- 1) a) Vérifier que $(2e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$
- b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 - 2z + \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- c) Déterminer dans \mathbb{C} les solutions de l'équation (F) : $z^2 - 2z + \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$
- 2) soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) : $z^2 - 2z - 2i \sin(\theta)e^{i\theta} = 0$
- On note z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E_θ) .
- a) Montrer que $\arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$
- b) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation (E_θ) .
- 3) (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère orthonormé direct du plan complexe. On désigne par A, M et N les points d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_M = 1 - e^{i\theta}$ et $z_N = 1 + e^{i\theta}$
- a) Montrer que $z_N = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$, $\forall \theta \in]0, \pi[$
- b) En déduire une écriture exponentielle des nombres complexes z_M et z_N .
- 4) a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$.
- b) Montrer que le quadrilatère OMAN est un rectangle.

Exercice 6

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) (unité graphique : 2cm).
On considère les points A ; B et C d'affixes respectives $z_A = 1 - i$; $z_B = 2 + \sqrt{3} + i$ et $z_C = 2$.
Soit ξ le cercle de centre C et de rayon 2.

- 1) a) Vérifier que $B \in \xi$.
- b) Placer les points A et C. Construire alors le point B.
- 2) a) Ecrire z_A sous forme exponentielle.
- b) Ecrire $\frac{z_B}{z_A}$ sous forme algébrique.
- c) Montrer que $\frac{z_B}{z_A} = (1 + \sqrt{3}) e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- d) En déduire la forme exponentielle de z_B .
- e) Déterminer alors la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$.
- 3) Déterminer l'ensemble des points M(z) du plan tel que : $|z| = |\bar{z} - 1 - i|$.
- 4) Pour tout point M du plan d'affixe $z \neq 2$ on associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -3i(\frac{z-1+i}{z-2})$.
- a) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' soit réel.
- b) Montrer que $OM' = 3 \frac{AM}{CM}$.
- c) En déduire que lorsque M décrit la médiatrice de $[AC]$; le point M' décrit un cercle que l'on déterminera.