

Exercice n°1 :

A. Mettre sous forme trigonométrique : $-2(1+i)^6$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$; $\frac{(\sqrt{3}+i)^{12}}{(1+i)^8}$; $(-1+i)e^{3i\frac{\pi}{4}}$; $i \cos \theta + \sin \theta$; $i \cos \theta - \sin \theta$; $\cos \theta$; $i \sin \theta$; $1 + i \cot \theta$; $\frac{1}{1+i \operatorname{tg} \theta}$; $\frac{1}{1-i \operatorname{tg} \theta}$; $\frac{i}{1+i \operatorname{tg} \theta}$; $\frac{i}{1-i \operatorname{tg} \theta}$;
 $\frac{1+\cos \theta+i \sin \theta}{1-\cos \theta-i \sin \theta}$

B. Déterminer le module et un argument de $Z = \frac{1+i \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1-i \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}$. Déduire la forme algébrique de Z .

Exercice n°2 :

Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} ; Z_2 = 1+i ; Z = \frac{Z_1}{Z_2}. \text{ En déduire } \cos \frac{\pi}{12} \text{ et } \sin \frac{\pi}{12}$$

Exercice n°3 :

1. Calculer $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{30}$; $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$

2. Comment choisir l'entier n pour que $(\sqrt{3}+i)^n$ soit un réel positif ? Soit imaginaire pur.

Exercice n°4 :

Dans le plan complexe \mathcal{P} ; Déterminer les ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \text{ tel que } A(1); M(z) \text{ et } M'(1+z^2) \text{ soient alignés}\}$$

$$F = \{M(z) \text{ tel que } A(i); M(z) \text{ et } M'(iz) \text{ soient alignés}\}$$

Exercice n°5 :

Dans le plan complexe on considère les points : $A\left(\frac{1+i}{2}\right)$; $B(2i)$ et $M(z)$.

Pour $M \neq A$ on pose : $Z' = \frac{z-2i}{2z-1-i}$

Déterminer et construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que :

a) Z' est réel b) Z' est imaginaire pur c) $\arg(Z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Exercice n°6 : (bac 2001)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (o, \vec{u}, \vec{v}) ; on considère les points A et B d'affixes

respectives : $a = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{\sqrt{3}+i}{2}$

- 1) a/ Ecrire sous forme trigonométrique chacun des nombres a et b
b/ Représenter les points A et B dans le repère (o, \vec{u}, \vec{v}) .
- 2) On pose $z = a + b$ et on désigne par M le point d'affixe z
a/ Montrer que $OBMA$ est un carré.
b/ Donner la forme trigonométrique de z
c/ calcules : $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

Exercice n°7 :

Soit $Z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$

- 1) a) Vérifier que $Z^5 - 1 = 0$
b) Factoriser $Z^5 - 1$ et en déduire que $1 + Z + Z^2 + Z^3 + Z^4 = 0$
- 2) a) Exprimer Z, Z^2, Z^3 et Z^4 sous forme trigonométrique.
b) Démontrer les égalités : $Z + Z^4 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}$; $Z^2 + Z^3 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$
Montrer que $\cos \frac{2\pi}{5}$ est une racine de l'équation $4x^2 + 2x - 1 = 0$
En déduire la valeur de $\cos \frac{2\pi}{5}$

Exercice n°8 :

Soit $Z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$ ou $\theta \in]-\pi, \pi[$

- 1) Calculer $(1 + e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$. En déduire un argument de $1 + e^{i\theta}$
- 2) Trouver le module et un argument de Z .

Exercice n°9 :

Soit $\theta \in]-\pi, \pi[$; On pose $z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$

- 1) Montrer que z est imaginaire pur.
- 2) Montrer que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$; $1 + e^{i\theta} = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$
- 3) Donner le module et un argument de z
- 4) Trouver θ pour $|z| = \sqrt{3}$

Exercice n°10 :

- 1) Montrer que $1 + e^{i\frac{\pi}{n}} + e^{2i\frac{\pi}{n}} + \dots + e^{i(n-1)\frac{\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$ n un entier naturel non nul
- 2) En déduire que $\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \cot g\left(\frac{\pi}{2n}\right)$
- 3) Soit $S_n = \frac{1}{n}(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin(n-1)\frac{\pi}{n})$
a) Calculer $\lim_{t \rightarrow 0} t \cot g\left(\frac{\pi}{2}t\right)$

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

Exercice n°11 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) .

Soit la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} ; z \mapsto g(z) = \frac{iz^2}{|z-1|^2 + \bar{z}-1}$

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de la fonction g
 - b) Montrer que pour tout $z \in Dg$ on a : $g(z) = \frac{iz}{\bar{z}-1}$
 - c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{P} : \{M(z)/g(z) \in i\mathbb{R}\}$
- 2) Soit M et M' les deux points d'affixes respectives $z \in Dg$ et $z' = g(z)$

a) Montrer que $(\widehat{OM, OM'}) \equiv (\widehat{OI, IM}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

En déduire l'ensemble $\mathcal{D} : \{M(z) \in \mathcal{P} / O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}\}$

b) Montrer que $M \in \text{med}[OI]$ ssi $z' = -i$

3) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$ déterminer en fonction de θ , la forme trigonométrique de $g(e^{i\theta})$. Déterminer et construire alors les points $M(e^{i\theta})$ tel que : $M'(g(e^{i\theta})) \in \Delta : y = x$

Exercice n°12 :

1) Montrer que $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}}$

2) Montrer que $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n \left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$

3) En déduire $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \cos(\alpha k)$ et $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k \sin(\alpha k)$

Exercice n°13:

Dans le plan complexe \mathcal{P} rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points A et B d'affixe respectives 1 et (-1) et on désigne par \mathcal{P}' le plan \mathcal{P} privé du point A . Soit f l'application de \mathcal{P}' dans \mathcal{P} qui à tout point M de \mathcal{P}' d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z(\bar{z}-1)}{z-1}$

1) a) Soit C le point d'affixe i . Déterminer $f(C)$.

b) Soit \mathcal{C} le cercle de centre O et de rayon 1. Montrer que pour tout point M de $\mathcal{C} \setminus \{A\}$ on a $f(M) = B$

2) Déterminer l'ensemble des points invariants f .

3) Soit M un point quelconque du plan privé de la droite (AB) et du cercle \mathcal{C} . On désigne par M_1 l'image de M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et par M' l'image de M par f .

- a) Vérifier que $\frac{z_{\overline{M_1 M'}}}{z_{\overline{A M_1}}} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2}$ et en déduire que les vecteurs $\overline{M_1 M'}$ et $\overline{A M_1}$ sont orthogonaux.
- b) Montrer que les vecteurs $\overline{M_1 M'}$ et $\overline{B M'}$ sont orthogonaux.
- c) En déduire une construction géométrique du point M' .

Exercice n°14:

$$\text{Soit } z = \frac{1+\sqrt{3}}{4} + i \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Calculer z^2 puis z^{12}

Exercice n°15:

Soit le nombre complexe $z = 1 + \sqrt{3} + i(\sqrt{3} - 1)$

- 1) Déterminer le module et un argument de $z' = (1 + i)z$
- 2) En déduire le module et un argument de z .