03 Série

BAC

ANALYSE
Equations Différentielles

EXERCICE N°1 :	15'	4 points

Soit l'équation différentielle $(E) : y' - 2y = 2(e^{2x} - 1)$.

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(E') : y' - 2y = 0$
2) Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{2x} + 1$ est une solution de (E).
3) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - h)$ est une solution de (E').
   b) En déduire les solutions de (E).
4) Soit g la solution de (E) qui s'annule en 0 et soit C_g sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   a) Expliciter $g(x)$.
   b) Calculer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et montrer que pour tout $x \leq \frac{1}{2}$ on a : $g(x) \leq 1$.
5) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe C_g, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ et $y = 1$.

EXERCICE N°2 :	15'	4 points

Soit l'équation différentielle $(E) : y' + 3y = 10\cos x$

1) Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 3y = 0$.
2) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3\cos x + \sin x$ est une solution de(E)
3) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0).
4) Déterminer alors la solution de l'équation (E) tel que $f(0) = 4$.
5) Déduire une solution de l'équation $(E_1) : y'' + 3y' = 10\cos x$.

EXERCICE N°3 :	15'	4 points

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{e^{2x}}{1+e^x}$

1) Déterminer la solution de l'équation : $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2) Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.
   a) Calculer $g(0)$.
   b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
3) a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$
   b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit une solution de (E).

EXERCICE N°4 :	15'	4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On considère les équations différentielles : $(E) : y' + 2y = 3e^{-3x}$ et $(E') : y' + 2y = 0$.

1) a) Résoudre l'équation différentielle (E').
   b) En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
   c) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de (E).
2) a) En remarquant que $f(x) = g(x) + h(x)$, montrer que f est solution de (E).
   b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 3e^{-2x}\left(\frac{3}{2} - e^{-x}\right)$.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3) a) Déterminer l'intersection de C_f avec les axes du repère.
   b) Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe C_f.
4) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limité par C_f, les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.