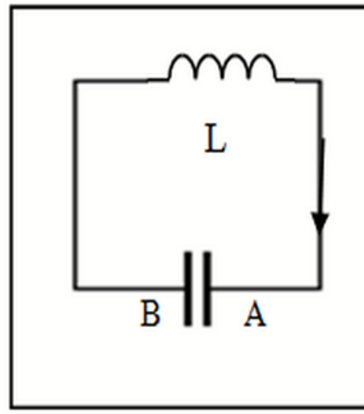
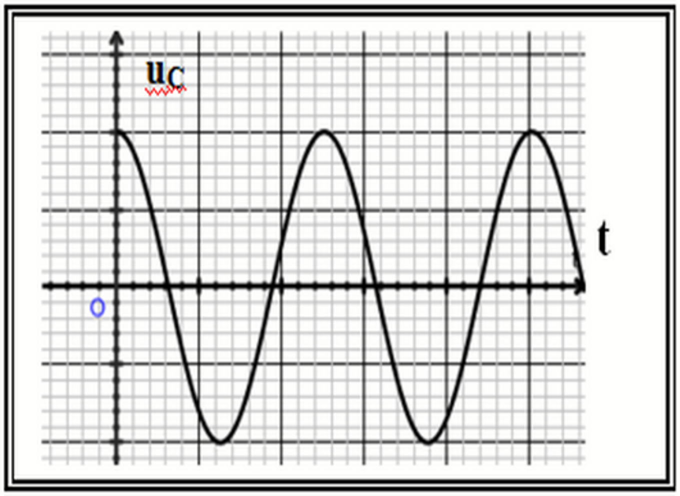
Exercice :

Un condensateur de capacité **$C = 100\mu F$** est chargé à l'aide d'un générateur de f.e.m **E_g** .Quand la charge du condensateur est maximale, on l'isole du générateur et on relie ses bornes A et B à celle d'une bobine d'inductance **L** et de résistance négligeable.
A l'aide d'un oscilloscope on visualise la tension u_{AB} aux bornes du condensateur. On obtient l'oscillogramme de la figure suivante.





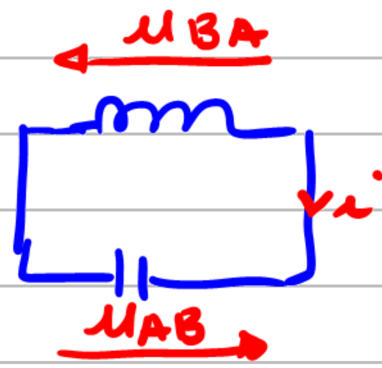
- Sensibilité verticale est **2V/div**
- Sensibilité horizontale est **0,8 ms/div.**

1) **a-** Etablir l'équation différentielle qui régit la tension u_{AB} aux bornes du condensateur.
b- Justifier alors l'allure de l'oscillogramme**.**
c- Expliquer pourquoi les oscillations d'un tel circuit sont dites libres non amorties.
d- Déterminer la période propre **T_0** et la valeur maximale de la tension u_{AB} puis écrire l'expression de u_{AB} (t).

2) Etablir les expressions en fonction du temps :
- **a-** De la charge **q** du condensateur.
- **b-** De l'intensité i du courant qui circule dans le circuit.
- **c-** Représenter sur le même système d'axe q(t) et i(t).

NETSCHOOL1
ACADEMY

1a. loi des mailles :



$u_{AB} + u_{BA} = 0$

$u_{AB} + L\dfrac{di}{dt} = 0$

or $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du_{AB}}{dt}$

$u_{AB} + LC\dfrac{d^2u_{AB}}{dt^2} = 0$

$\dfrac{d^2u_{AB}}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}u_{AB} = 0$

posons $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC}$

$$\boxed{\dfrac{d^2u_{AB}}{dt^2} + \omega_0^2\, u_{AB} = 0.} \quad (1)$$

b. L'equation (1) est celle d'un oscillateur libre non amortie. Elle admet une solution particulière de la forme

$u_{AB}(t) = U_{ABm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB})$

d'où les oscillations dans le circuit LC

sont sinusoïdales (libres non amorties)

c. libres : se font sans intervention

d'un générateur (sans excitateur)

amorties : L'amplitude reste

constante.

d. $T_0 = 2{,}5 \times 0{,}8 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3}\ s.$

$U_{ABm} = 2 \times 2 = 4\ V$

Rq $\Rightarrow U_{ABm} = E_q = 4\ V.$

NETSCHOOL1
ACADEMY

$u_{AB}(t) = U_{AB_m} \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB})$

$\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0} = \dfrac{2\pi}{2.10^{-3}} = 10^3 \pi \ \text{rad.s}^{-1}$

à $t = 0$ $\quad u_{AB} = U_{AB_m} \sin \varphi_{AB}$.

$\sin \varphi_{AB} = \dfrac{u_{AB}}{U_{AB_m}} = 1 \Rightarrow \varphi_{AB} = \dfrac{\pi}{2} \ \text{rad}$

d'où $\boxed{u_{AB}(t) = 4 \sin(10^3 \pi t + \pi/2)}$

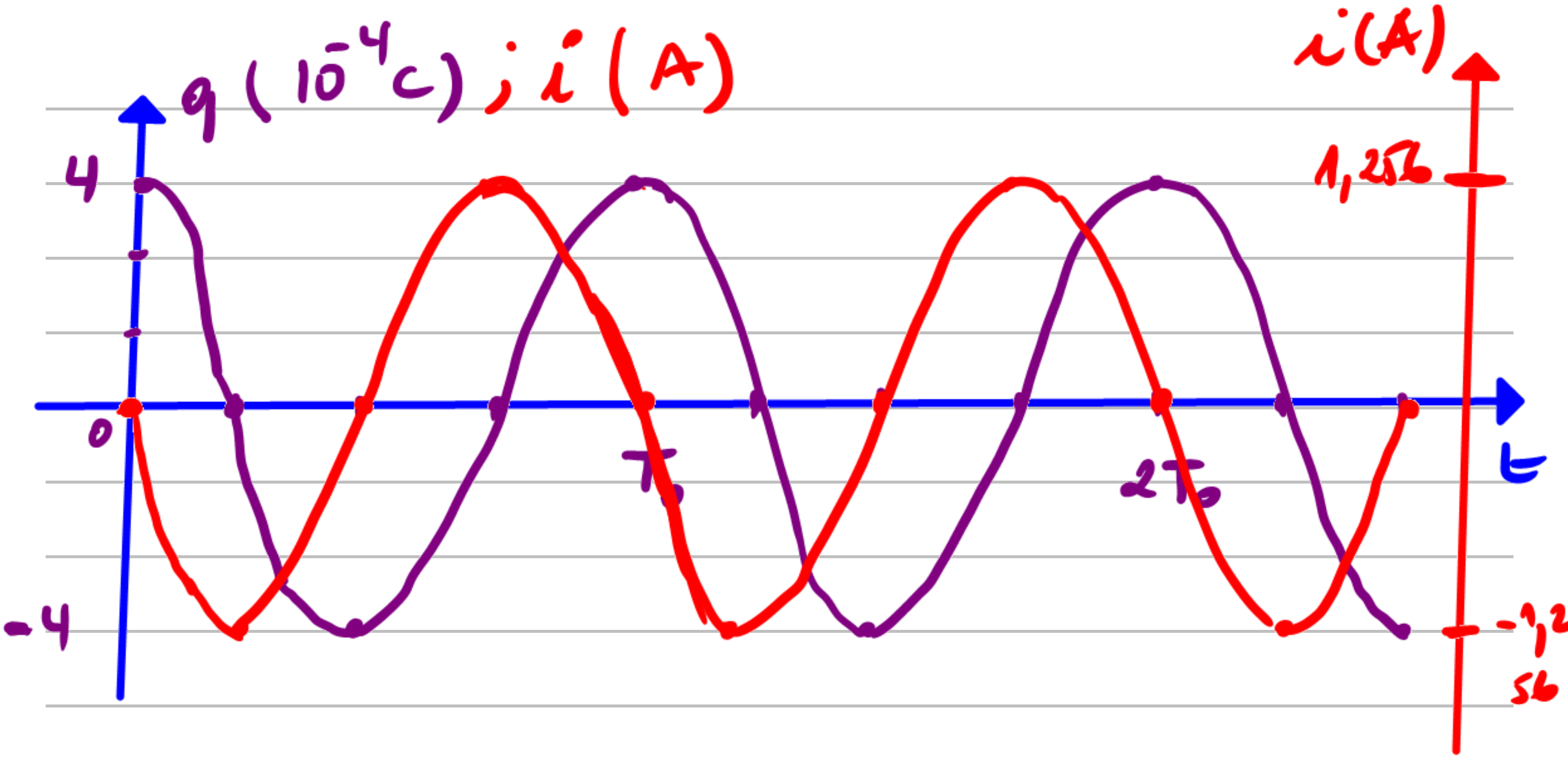
2a. $q(t) = C . u_{AB}(t)$

$\boxed{q(t) = 4.10^{-4} \sin(10^3 \pi t + \pi/2)}$

$i(t) = \dfrac{dq}{dt} = 4.10^{-4} \times 10^3 \pi \cos(10^3 \pi t + \pi/2)$

$\boxed{i(t) = 1{,}256 \sin(10^3 \pi t + \pi)}$.

NETSCHOOL1
ACADEMY



$\varphi_i - \varphi_q = \pi - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2}$ rad $\rightarrow$

$i(t)$ est en quadrature avance de phase p/r à $q(t)$.

$\frac{T}{4}$

3) On donne la courbe représentative de **$q^2 = f(i^2)$**.(figure ci-dessous)

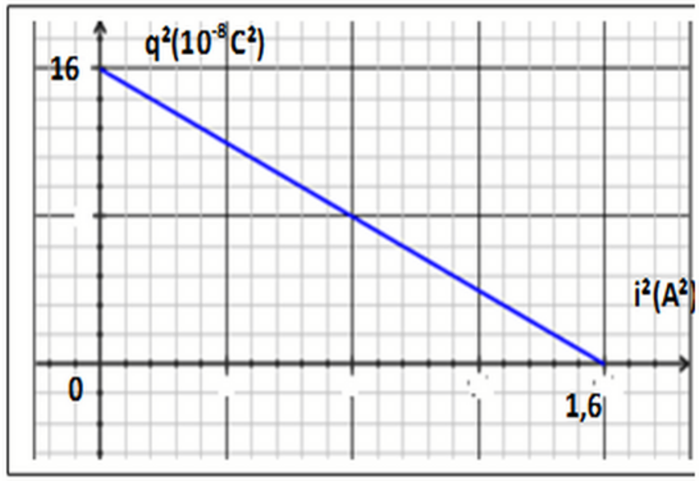
a- Montrer, en utilisant les expressions temporelles de **q(t)** et de **i(t)** la relation : **$q^2 = A\,(I_m^2 - i^2)$** avec **Im** : l'intensité maximale de **i(t)** et **A** : une constante que l'on demande d'exprimer en fonction de **L** et **C**.

b- Vérifier que cette relation est en accord avec l'allure de la courbe **$q^2 = f(i^2)$**.

c- Retrouver les valeurs de :

- La charge maximale **Q_m**.
- L'intensité maximale I_m.
- La pulsation propre ω_0.

d- Déduire de la courbe précédente que l'énergie totale de l'oscillateur se conserve puis calculer sa valeur.



3a. $q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB})$ avec $Q_m = CU_{AB_m}$

$i(t) = \underbrace{\omega_0 Q_m}_{I_m} \cos(\omega_0 t + \varphi_{AB})$

$i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_{AB})$.

$q^2 = Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{AB})$

$E_{em} = \frac{1}{2C} Q_m^2 = 16.10^{-3}$ J.

or $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$q^2 = Q_m^2 \left[1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_{AB}) \right]$$

$$= Q_m^2 \left[1 - \frac{i^2}{I_m^2} \right]$$

$$= \frac{Q_m^2}{I_m^2} \left[I_m^2 - i^2 \right]$$

$$\boxed{q^2 = A \left[I_m^2 - i^2 \right]}$$

avec $A = \dfrac{Q_m^2}{I_m^2} = \dfrac{Q_m^2}{\omega_0^2 Q_m^2} = LC$

b. $q^2 = A I_m - A i^2$

$y = b + a x$ avec $\begin{cases} b = A I_m \\ a = -A \end{cases}$

NETSCHOOL1
ACADEMY

$q^2 = f(i^2)$ est de la forme $y = ax+b$ donc sa représentation est une droite affine décroissante.

c. * si $i=0$ $\quad q^2 = Q_m^2 = 16.10^{-8}\,C^2$

$\Rightarrow Q_m = 4.10^{-4}\,C.$

* si $q=0 \Rightarrow i^2 = I_m^2 = 1,6\,A^2$

$I_m = \sqrt{1,6} = 1,26\,A.$

* $-A = -\dfrac{16.10^{-8} - 0}{0 - 1,6} = 10.10^{-8} = LC$

$= \dfrac{1}{\omega_0^2}$

$\omega_0^2 = \dfrac{1}{-A} = 0,1.10^{+8} \Rightarrow \omega_0 = 3,16.10^{3}\,rad$

NETSCHOOL1
ACADEMY

$\omega_0 = 10^3 \pi = 3{,}14\,10^3 \text{ rad}$

d. $E_{em} = E_e + E_m = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$

$E_{em} = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L i^2.$

$$\frac{dE_{em}}{dt} = \frac{1}{2C}\left(2 \frac{dq}{dt} q\right) + \frac{1}{2} L \left(2 \frac{di}{dt} i\right)$$

$$\frac{dE_{em}}{dt} = \frac{q}{C} i + i \times L \frac{di}{dt}.$$

$$= i \underbrace{\left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt}\right)}_{0} = 0$$

$\Rightarrow E_{em} = c^{te} \rightarrow E_{em}$ se conserve.

$$q^2 = \frac{1}{\omega_0^2}\left(I_m^2 - i^2\right).$$

$$\frac{dq^2}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\omega_0^2}\left(I_m^2 - i^2\right)\right]$$

$$2q\frac{dq}{dt} = -2i\frac{di}{dt} \times \underbrace{\frac{1}{\omega_0^2}}_{LC}$$

$$\frac{q}{c}\frac{dq}{dt} + Li\frac{di}{dt} = \frac{dE_{em}}{dt}$$

$$i\underbrace{\left(\frac{q}{c} + L\frac{di}{dt}\right)}_{0} = \frac{dE_{em}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_{em} = C^{te}$$