Rappels : Fonction Logarithme Népérien

1. Définition

Définition

On appelle logarithme népérien et on note ln, la fonction

$x \mapsto \ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt;\ x > 0$

Autrement dit : La fonction ln est la primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{t}\right)$, qui s'annule en 1.

Censéquences

1/ $\ln(x)$ existe si et seulement si $x \in]0;+\infty[$

2/ ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln(x))' = \frac{1}{x} > 0$; pour tout $x \in]0;+\infty[$.

3/ ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4/ $\forall x \in]0;\ 1];\ \ln(x) \leqslant \ln(1)=0$ et $\forall x \in [1;\ +\infty[;\ \ln(x) \geqslant \ln(1)=0$.

5/ Soient a et b deux éléments de $]0;+\infty[$ on a :

$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$

$\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$

Si $a.b > 0$ alors $\ln(a.b) = \ln|a| + \ln|b|$

2. Proproétés algébriques

Prepriétés

Soient a et b deux éléments de $]0;+\infty[$ on a :

1/ $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ c'est la propriété fondamentale de ln

2/ Pour tout $n \in IN^*$

$\ln(a^n) = n\ln(a)$ et $\ln\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ln(a).$

3/ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$ et $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

$\cancel{\ln^n(a) = n\ln a}$

$\cancel{\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)}$

$\cancel{\frac{\ln a}{\ln b} = \ln(a) - \ln(b)}$

NETSCHOOL1
ACADEMY

3. Logarithme et limites

Théerème

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ **et** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

2/ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ **et** $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} x\ln(x) = 0}$

3/ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$

4/ Pour tous entiers non nuls n et m, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^n(x)}{x^m} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^m \ln^n(x) = 0$

4. Logarithme et dérivabilité

Théerème

Si $\begin{cases} u \text{ une fonction dérivable sur un intervalle } I \\ u(x) > 0;\ \forall x \in I \end{cases}$ **alors** la fonction

$f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout x dans I.

Théerème

Si $\begin{cases} u \text{ une fonction dérivable sur un intervalle } I \\ u(x) \neq 0;\ \forall x \in I \end{cases}$ **alors** la fonction

$f : x \mapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I et $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ pour tout x dans I.

Censéquence

Si $\begin{cases} u \text{ une fonction dérivable sur un intervalle } I \\ u(x) \neq 0;\ \forall x \in I \end{cases}$ **alors** la fonction

$f : x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ admet pour primitive sur I la fonction $F : x \mapsto \ln|u(x)| + C$

où C est une constante réelle.

Théerème

La fonction $(x \mapsto \cancel{\ln(x) -} x)$ est un primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction ln

$x \mapsto x\ln(x) - x$

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1+x+\ln x$

1) Dresser le tableau de variation de g

g est définie continue et dérivable sur $]0;+\infty[$

et $\forall x>0$, on a $g'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$

$* \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x+1+\ln(x) = -\infty$ $\quad (\ln(x) \to -\infty)$

$* \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{+\infty} 1+x+\ln(x) = +\infty$ $\quad (\ln(x) \to +\infty)$

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$	‖		$+$		
$g(x)$	‖ $-\infty$	$-$ ↗	0	↗ $+$	$+\infty$

2) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet dans $]0;+\infty[$ une solution unique α et que $\alpha \in]0.2;0.3[$

on a g est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et on a $g(]0;+\infty[) =]-\infty;+\infty[$

Comme $0 \in g(]0;+\infty[)$ donc l'équation $g(x)=0$

admet dans $]0;+\infty[$ une unique solution α

$g(0{,}2) \simeq -0{,}4 < 0$

$g(0{,}3) \simeq 0{,}09 > 0$

Comme $g(0{,}2) \times g(0{,}3) < 0$ donc $0{,}2 < \alpha < 0{,}3$

3) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

4) Etablir que $\ln(\alpha) = -1-\alpha$

On a $g(\alpha) = 0 \iff 1+\alpha+\ln(\alpha) = 0$

$\iff \boxed{\ln(\alpha) = -1-\alpha}$

II- On considère la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{1+x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{1+x} = \frac{0}{1} = 0 = f(0)$$

Car $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-}$

donc f est continue à d^te en 0

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter ce résultat.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\cancel{x}\ln x}{1+x}}{\cancel{x}} = \lim_{0^+} \frac{\ln x}{1+x}$$

$= -\infty$

donc f n'est pas dérivable à d^{te} en 0 et $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente parallèle à $(o, \vec{j})$ dirigée vers les (y) négatifs.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{+\infty} \frac{x \ln(x)}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} \ln(x)}{\cancel{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)}$$

$$= +\infty$$

Car $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty}$

Si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$

f n'est pas dérivable en x_0 et $\mathcal{C}$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers :

m̂ signe → le haut

signe ≠ → le bas

4) Montrer que pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$

f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-v'u}{v^2}}$$

$\forall\, x>0$ on a :

$$\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x\ln x)'(1+x)-(1+x)'(x\ln x)}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{(u\cdot v)' = u'v+v'u}$$

$$= \frac{\left[1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right](1+x) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{(\ln(x)+1)(1+x) - x\ln x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{\ln(x) + \cancel{x\ln x} + 1 + x - \cancel{x\ln x}}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1+x+\ln(x)}{(1+x)^2} = \frac{g(x)}{(1+x)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)^2}}$$

5) Montrer que $f(\alpha)=-\alpha$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha\ln(\alpha)}{1+\alpha} = \frac{\alpha(-1-\alpha)}{1+\alpha}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$$= \frac{-\alpha\,\cancel{(1+\alpha)}}{\cancel{1+\alpha}} = -\alpha$$

$$\boxed{f(\alpha) = -\alpha}$$

6) Dresser le tableau de variation de f .

On a $\forall x>0$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)^2}$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\alpha$	↗	$+\infty$

7) Construire la courbe $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm. On prend $\alpha \approx 0.3$)

On a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

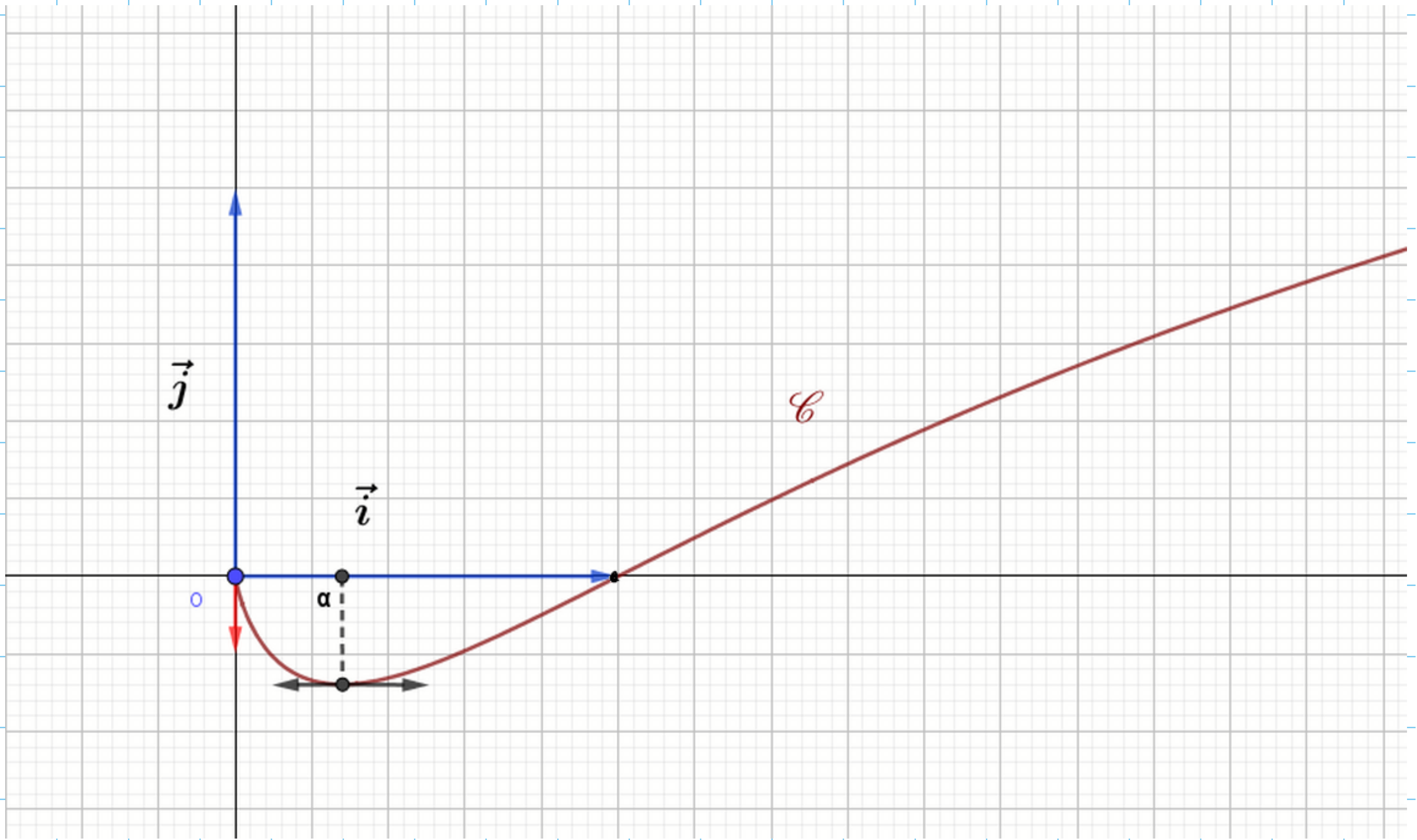
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 0$$

$\to 0$

car $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$

donc $(\mathscr{C})$ admet au voisinage de $(+\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{i})$



III-

1) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $I=\int_1^e x.\ln(x)dx$

$$I=\int_1^e x.\ln(x)\,dx$$

on pose $\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{1}{2}x^2 \end{cases}$

donc $I=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$

$=\frac{e^2}{2}\times\ln e-\frac{1}{2}\times 0-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^2-1) = \frac{2e^2-e^2+1}{4}$$

$$\boxed{I = \frac{e^2+1}{4}}$$

2) Montrer que pour tout $x \in [1,e]$,on a : $\frac{x\ln x}{e+1} \leq f(x) \leq \frac{x\ln x}{2}$

On a : $1 \leq x \leq e \Rightarrow 2 \leq 1+x \leq 1+e$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+x} \leq \frac{1}{2}$$

On a $x\ln x \geq 0$ car $x \in [1;e]$

donc $\frac{x\ln x}{1+e} \leq \frac{x\ln x}{1+x} \leq \frac{x\ln x}{2}$

d'où : $\boxed{\frac{x\ln x}{1+e} \leq f(x) \leq \frac{x\ln x}{2}}$

3) En déduire que $\frac{e^2+1}{4(e+1)} \leq \int_1^e f(x)dx \leq \frac{e^2+1}{8}$

on a : $\forall\, x \in [1;e]$, $\frac{x\ln x}{1+e} \leq f(x) \leq \frac{x\ln x}{2}$

les trois fonctions sont continues sur $[1;e]$

donc $\int_1^e \frac{x\ln x\,dx}{1+e} \leq \int_1^e f(x)dx \leq \int_1^e \frac{x\ln x\,dx}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e} I \leq \int_1^e f(x)dx \leq \frac{1}{2} I$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$$\Rightarrow \boxed{\frac{e^2+1}{4(1+e)} \leq \int_1^e f(x)\,dx \leq \frac{e^2+1}{8}}$$

$$\int_1^e \frac{x\ln x}{1+e}\,dx = \frac{1}{1+e}\int_1^e x\ln x\,dx$$

$$= \frac{1}{1+e} \times I$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \rightsquigarrow \text{Int graph}$$

$+$ l'aire

$-$ l'opposé de l'aire

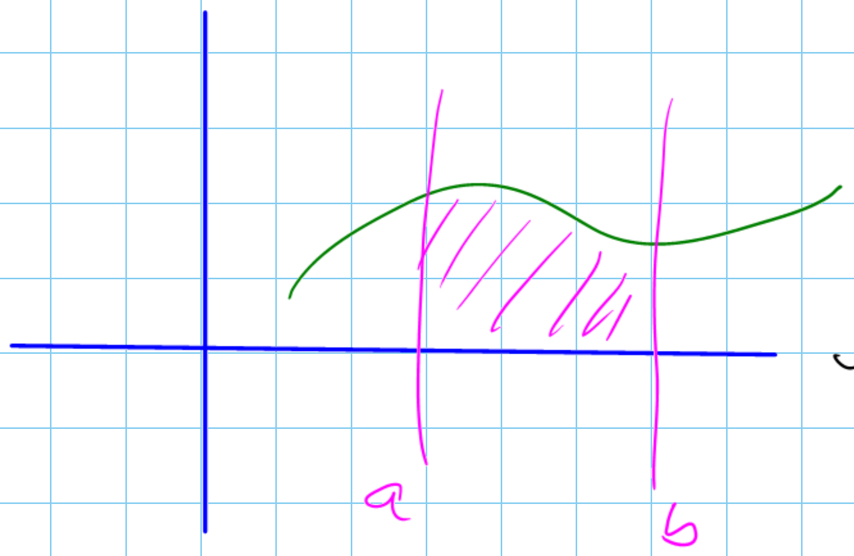
A L P E C

$\downarrow$ Log, $\downarrow$ poly, $\downarrow$ exp, $\downarrow$ Circ

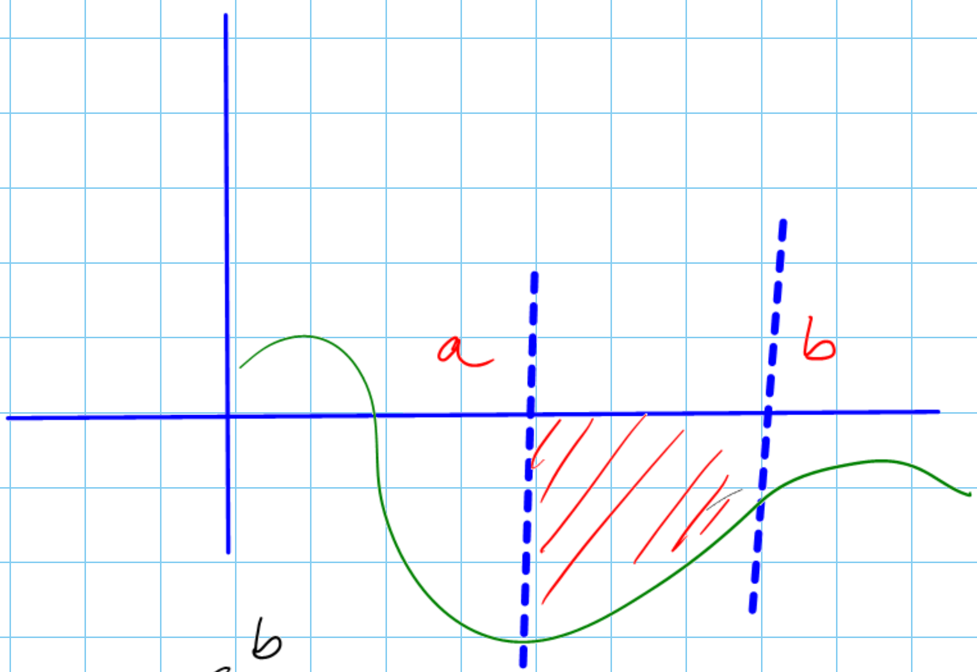
A L P E C

$\downarrow$ ln, $\downarrow$ polynômes, $\downarrow$ exp, $\downarrow$ Circulaires (trigo)

Priorité pour intégration par parties



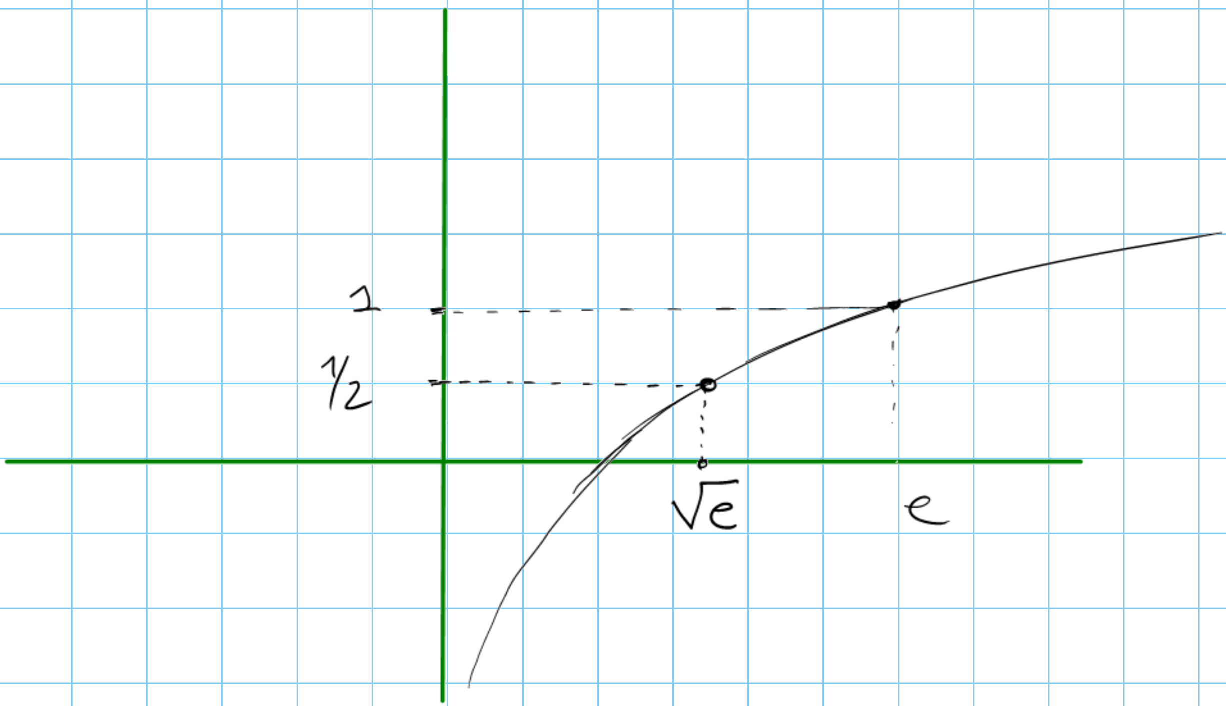
$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{A}$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = -\mathcal{A}$$

$$\boxed{I = \frac{e^2+1}{4}}$$

$$\frac{1}{1+e} I = \frac{1}{1+e} \, \frac{e^2+1}{4} = \frac{e^2+1}{4(1+e)}$$



$$\ln(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$$