01 série

BAC

ANALYSE
Equations différentielles

NETSCHOOL1 ACADEMY

EXERCICE N°1 :	25'	4 points

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E): $y'+3y=x^2-4x$

1°) Démontrer qu'il existe une fonction polynôme du second degré u solution de (E).

2°) Montrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $g=f-u$ est solution de l'équation différentielle (E_1): $y'+3y=0$.

3°) Résoudre l'équation (E_1). En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

4°) Déterminer la fonction f solution de (E) dont la courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ passe par le point A de coordonnées $(-1,2)$.

EXERCICE N°2 :	20'	4 points

On se propose de résoudre l'équation différentielle : (E): $y'-2y=\dfrac{2}{\left(1+e^{-2x}\right)^2}$

1°) Soit g une fonction dérivable sur IR et f la fonction définie par :

Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $g'(x)=\dfrac{2e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$.

2°) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

3°) Déterminer la fonction f solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

EXERCICE N°3 :	20'	4 points

1°) Résoudre l'équation différentielle $y''+y=0$.

2°) Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur IR telles que

Pour tout $x\in IR$, $f'(x)+f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=0$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

a) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=\cos x$. Vérifier que g est un élément de E.

b) Soit f un élément de E. Vérifier que, pour tout réel x, $f''(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$.

c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y''+y=0$

d) Déterminer alors l'ensemble E.

EXERCICE N°4 :	20'	3 points

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\begin{cases}(E):\ y'+(1+\tan x)\,y=\cos x\\(E_0):\ y'+y=1\end{cases}$$

1°) Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0).

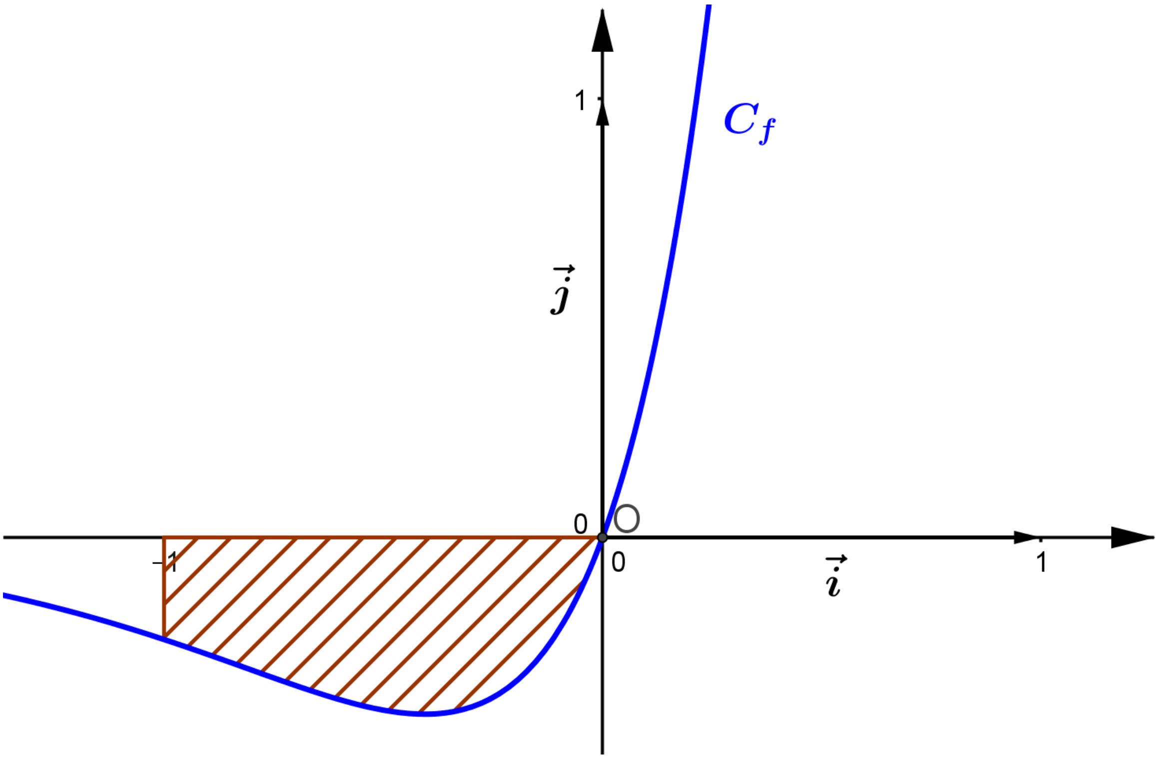
2°) Soient *f* et *g* deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et celle que $f(x)=g(x)\cos x$.

Démontrer que la fonction *f* est solution de (E) si et seulement si la fonction *g* est solution de (E_0).

3°) Déterminer la solution *f* de (E) telle que $f(0)=0$.

EXERCICE N°5 :	20'	4 points

On considère les équations différentielles : $(E_0): y'-3y=0$ et (E) : $y'-3y=e^{2x+1}$, et la courbe C_f de la fonction ci-contre solution de (E) définie sur IR.



1°) Résoudre l'équation (E_0).

2°) Vérifier que la fonction *g* définie sur IR par :

$g(x)=-e^{2x+1}$ est une solution de l'équation (E).

3°) Montrer que *f* est une solution de (E) si et seulement si $(f-g)$ est une solution de (E_0).

4°) En déduire les solutions de (E).

5°) a) Expliciter alors $f(x)$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan hachurée sur la figure.