Dérivée de la fonction exponentielle

Dérivée de la fonction exponentielle :

Désignons par f la fonction $x \longmapsto \ln(x)$

la fonction $x \longmapsto e^x$ est la fonction réciproque de f.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$; $f'(u) \neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$

et $\forall u \in \mathbb{R}$ on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\frac{1}{f^{-1}(x)}} = f^{-1}(x) = \boxed{e^x}$$

Ainsi :

La fonction $x \longmapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$; sa fonction dérivée est :

$x \longmapsto e^x$

Cas général :

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I ;

La fonction $h : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$ on a :

$$\boxed{h'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}}$$

Exemple :

déterminer les dérivées des fonctions suivantes:

$f : x \longmapsto x\, e^{-x^2+3x}$

$g : x \longmapsto \dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

Rep :

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = x'\, e^{-x^2+3x} + x\left(e^{-x^2+3x}\right)'$

$= e^{-x^2+3x} + x(-2x+3)\, e^{-x^2+3x}$

$= \boxed{(1-2x^2+3x)\, e^{-x^2+3x}}$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}^* ;\ g'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+1)}{(e^x-1)^2}$

$= \dfrac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}} - e^x}{(e^x-1)^2} = \boxed{\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}}$

NETSCHOOL1
ACADEMY