① Définition :

ⓐ Activité :

- $f :]0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \ln(x)$: f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$

- Dresser le tableau de f^{-1}

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f^{-1}(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Déterminer l'ensemble de dérivabilité de f^{-1} et calculer $(f^{-1})'(x)$

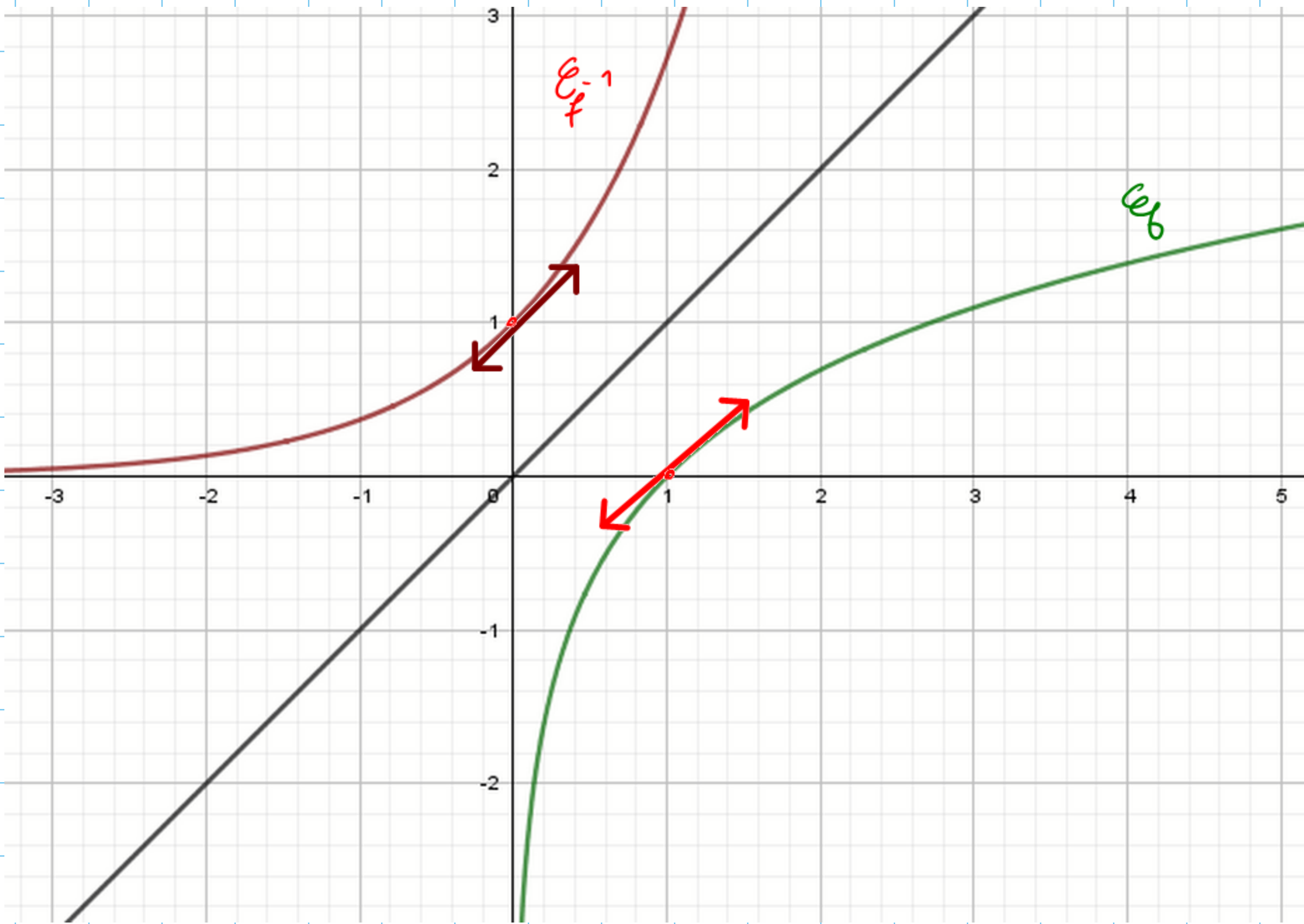
on a f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall x>0$ on a $f'(x)=\frac{1}{x}\neq 0$

donc f^{-1} est dérivable sur $f(]0;+\infty[) = \mathbb{R}$

$x \in \mathbb{R}$ on a $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{f^{-1}(x)}} = f^{-1}(x)$

$$(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x_0))}$$

- Construire la courbe $\mathcal{C}'$ de f^{-1}



(b) **Définition :** On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction ln définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x l'image de x par cette fonction on le note e^x

$$\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0;+\infty[$$
$$x \longmapsto \exp(x) = e^x$$

(c) **Propriétés :**

$f : x \longmapsto e^x$

① $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ ② $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{e^x > 0}$ ③ $\boxed{(e^x)' = e^x}$

④ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} e^x = y \\ y > 0 \end{cases} \iff x = \ln(y)$

$\forall x \in]0;+\infty[$ $\ln(x) = y \iff x = e^y$

ⓑ $\forall\, a\,;\, b \in \mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{\begin{array}{l} a = b \iff e^{a} = e^{b} \\ a > b \iff e^{a} > e^{b} \end{array}}$$

$$e^{0} = 1$$

ⓒ Propriétés algébriques :

$a\,;\, b$ dans $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\boxed{e^{a} \cdot e^{b} = e^{a+b}}$$

$$\boxed{\left(e^{a}\right)^{n} = e^{n \cdot a}}$$

$$\boxed{\frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{e^{p}} \\ \sqrt{e^{a}} = e^{\frac{a}{2}} \end{array}}$$

q entier ≥ 2

dem :

$\ln\left(e^{a+b}\right) = a + b$

$\ln\left(e^{a} \cdot e^{b}\right) = \ln\left(e^{a}\right) + \ln\left(e^{b}\right) = a + b$

donc $e^{a+b} = e^{a} \cdot e^{b}$

Exercice :

Simplifier :

$\sqrt[6]{e^{2}} \times e^{3/2} = e^{\frac{2}{6}} \times e^{\frac{3}{2}} = e^{\frac{2}{6}+\frac{3}{2}} = e^{\frac{11}{6}}$

$\dfrac{\sqrt{e^{3}}}{\sqrt{e^{-4}}} \cdot \sqrt[4]{e^{2}} = \sqrt{\dfrac{e^{3}}{e^{-4}}} \cdot e^{\frac{2}{4}} = \sqrt{e^{7}} \cdot \sqrt{e}$

$= \sqrt{e^{8}} = e^{4}$

$\dfrac{\sqrt{e^{30}}}{\sqrt{e^{-42}}} \cdot \sqrt[10]{e^{-20}} = \sqrt{e^{72}} \cdot e^{-\frac{20}{10}} = e^{36} \cdot e^{-2}$

$= e^{34}$

Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$e^{x+3} > 2 \iff x + 3 > \ln(2)$

$$\iff x > \ln(2) - 3$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left] \ln(2) - 3 \,;\, +\infty \right[$$

$$e^{2x-1} = 2 \iff 2x - 1 = \ln(2)$$

$$\iff 2x = \ln(2) + 1 \iff x = \frac{1}{2}(\ln 2 + 1)$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\ln(2)+1}{2} \right\}$$

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0 \quad \text{on pose } t = e^{x}$$

l'équation devient : $t^2 + 2t - 3 = 0$

$$\iff t = 1 \quad \text{ou} \quad t = -3$$

$$\iff e^{x} = 1 \quad \text{ou} \quad e^{x} = -3 < 0 \text{ impossible}$$

$$\iff x = \ln(1) = 0$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$$

2 Les Limites usuelles :

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^{x} = 0^{+}}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - 1}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^{n} e^{mx} = 0}$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{mx}}{x^{n}} = +\infty}$$

NB : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} x e^{x} = 0}$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$\ln(x)$ .... les puissances de x .... $\exp(x)$ $\longrightarrow +\infty$

- n'importe quelle puissance de x domine n'importe quelle puissance de ln
- " " " " est dominée par " " " de exp

Exercice :

① $$\lim_{x\to+\infty} x^2 - e^x = \lim_{x\to+\infty} x^2\Big(1 - \underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to +\infty}\Big) = -\infty$$

② $$\lim_{x\to+\infty} e^{3x} - 2e^x = \lim_{+\infty} \underbrace{e^x}_{\to+\infty}\big(\underbrace{e^{2x} - 2}_{\to+\infty}\big) = +\infty$$

③ $$\lim_{x\to-\infty} (x^2 - 2x + 3)e^x = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2e^x}_{\to 0} - 2\underbrace{xe^x}_{\to 0} + 3\underbrace{e^x}_{\to 0}$$
$$= 0$$

④ $$\lim_{x\to0^+} x\,e^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$$
on pose $t = \frac{1}{x}$
$x \longrightarrow 0^+$
$t \longrightarrow +\infty$

⑤ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x\sqrt{x+1}}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\underbrace{e^x}_{}\sqrt{x+1}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$
$\frac{e^x}{x} \to +\infty$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$$

⑥ $$\lim_{x\to0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{t\to-\infty} \frac{e^t}{-\frac{1}{t}}$$
on pose $t = -\frac{1}{x}$
$x \longrightarrow 0^+$
$t \longrightarrow -\infty$
$$= \lim_{t\to-\infty} -\underbrace{te^t}_{\to 0} = 0$$

⑦ $$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x} = \lim_{x\to0} \underbrace{\frac{e^{2x}-1}{2x}}_{\to 1} \times 2 = 1\times 2 = 2$$

Ex 2 p 157 Ex 3

3) Fonction : $x \longmapsto e^{u(x)}$

a) Théo :

I un intervalle ; u une fonction dérivable sur I alors la fonction $x \overset{f}{\longmapsto} e^{u(x)}$ est dérivable sur I et on a :

$$f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

$$\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$$

Exp : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \neq 0$ on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}$$

$g(x) = e^{x^2-2x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g'(x) = (2x-2)\, e^{x^2-2x}$$

d) Corollaire

I un intervalle de $\mathbb{R}$, u une fonction dérivable sur I, une primitive de la fonction $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ est $x \longmapsto e^{u(x)}$

$$\boxed{x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)} \rightsquigarrow x \longmapsto e^{u(x)}}$$

Exp : Calculer : $J = \int_0^{\pi/4} (1+tg^2 x)\, e^{tg(x)}\, dx$

$$= \left[e^{tg(x)} \right]_0^{\pi/4} = e - 1$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

Correction : Ex2 p157

$$e^{5\ln 3} = e^{\ln(3^5)} = 3^5$$

$$e^{-3\ln 2} = e^{3\ln(\frac{1}{2})} = e^{\ln(\frac{1}{2})^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$\ln\left(e^{-2/3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$e^{\ln 3 - \ln 2} = \frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 2}} = \frac{3}{2}$$

$$e^{5\ln 2} - e^{3\ln 4} = e^{\ln 2^5} - e^{\ln 4^3} = 2^5 - 4^3 = 2^5 - 2^6 = 2^5(1-2)$$
$$= -2^5$$

$$\frac{e^{2\ln 3}}{e^{\ln 81}} = \frac{3^2}{81} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\frac{e^3}{e^{4+\ln 3}} = \frac{e^3}{e^4 \cdot e^{\ln 3}} = \frac{e^{-1}}{3}$$

$$e^{a+b} = e^a \cdot e^b$$

$$= \frac{1}{3e}$$

Correction d'Ex3 p157

$$e^x \cdot e^{-2x} = e^{-x}$$

$$e \cdot e^x = e^{x+1}$$

$$\frac{(e^x)^4}{e^{2x}} = \frac{e^{4x}}{e^{2x}} = e^{2x}$$

$$\frac{e^x}{e^{-x}} = e^{2x}$$

$$\frac{e^x}{e^{1-x}} = e^{2x-1}$$

$$\frac{e^{2x}\, e^{1-x}}{e^{1-x}} = e^{3x-1}$$

$$\left(e^x + e^{-x}\right)^2 = e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} = e^{2x} + e^{-2x} + 2$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x\left(e^x - e^{-x}\right)}{e^x\left(e^x + e^{-x}\right)} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

2ème meth :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{\cancel{e^x}}}{\frac{e^{2x}+1}{\cancel{e^x}}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

4°/ Fonction exponentielle à base a $(a>0)$

ⓐ Activité 1 p 150 :

(1) $e^{3\ln 2} = 2^3 = 8$ $\qquad e^{4\ln(\frac{1}{2})} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$e^{-2\ln\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$e^{-\ln(\frac{1}{2})} = e^{\ln 2} = 2$

(2) $a>0$; $n \in \mathbb{N}$ $\qquad e^{n\ln a} = e^{\ln(a^n)} = a^n$

Pour tout réel a strictement positif et pour tout réel b on pose $a^b = e^{b \cdot \ln a}$

Act 2 p 150

p et q deux entiers tels que $q \geq 2$; $a \in \mathbb{R}_+^*$

$$a^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{1}{q}\ln(a)} = e^{\ln(\sqrt[q]{a})} = \sqrt[q]{a}$$

$$a^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{1}{q}\ln(a^p)} = e^{\ln \sqrt[q]{a^p}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Act 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$.

$2^x = \frac{1}{2} \iff e^{x\ln 2} = \frac{1}{2} \iff x\ln(2) = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\iff x = \frac{\ln(1/2)}{\ln(2)} = -\frac{\ln 2}{\ln 2} = -1$

$S_{\mathbb{R}} = \{-1\}$

$10^{x+1} = 2^{-x+2}$

$\iff e^{(x+1)\ln(10)} = e^{(-x+2)\ln 2}$

$\iff (x+1)\ln(10) = (-x+2)\ln(2)$

$\iff x(\ln 10 + \ln 2) = 2\ln 2 - \ln 10$

$\iff x = \frac{\ln 4 - \ln 10}{\ln 10 + \ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{4}{10}\right)}{\ln(20)}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}{\ln(20)} \right\}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$$2^x = 2^{-x+1} \iff e^{x\ln 2} = e^{(-x+1)\ln 2}$$

$$\iff x \cancel{\ln 2} = (-x+1)\cancel{\ln 2} \iff 2x = 1$$

$$\iff x = 1/2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

(b) Propriétés : $a > 0$; $b > 0$ $c \in \mathbb{R}$; $d \in \mathbb{R}$

$$a^c \cdot a^d = a^{c+d}$$

$$\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$$

$$\frac{1}{a^c} = a^{-c}$$

$$(a^c)^d = a^{c \cdot d}$$

$$a^c b^c = (ab)^c$$

$$\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$$

$a > 0$ $x \in \mathbb{R}$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

(c) Définition : $a \in \mathbb{R}_+^*$

On appelle fonction exponentielle à base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$x \longmapsto a^x = e^{x \ln a}$$

Act : $a > 0$; $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = a^x = e^{x \ln a}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln(a) \cdot e^{x \ln a}$

$$f'(x) = \ln(a)\, a^x \rightsquigarrow > 0$$

1er cas : si $a \in \,]0;1[$ $\ln(a) < 0$

$$\lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0

2e cas : Si $a \in]1;+\infty[$ $\qquad \ln(a) > 0$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} a^x = 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

5°) Fonctions puissances :

a) Définition : Soit r un rationnel ($r \in \mathbb{Q}$), on appelle fonction puissance r la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$x \longmapsto x^r = e^{r\ln x}$$

$r > 0$	$r < 0$
$\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty$ $\lim_{0^+} x^r = 0$	$\lim_{x\to+\infty} x^r = 0$ $\lim_{x\to0^+} x^r = +\infty$

Exp :

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}} = +\infty \qquad \lim_{x\to0^+} x^{\frac{2}{3}} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{4}{3}} = 0 \qquad \lim_{x\to0^+} x^{-\frac{4}{3}} = +\infty$$

(b) Act : $r \in \mathbb{Q}$; $x > 0$ $f(x) = x^r$

$$f(x) = x^r = e^{r \ln x}$$

$x \longmapsto r \cdot \ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$

donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \frac{r}{x} \cdot e^{r \ln x} = r \cdot x^{-1} \cdot x^r$$
$$= r \cdot x^{r-1}$$

Théorème :

$\forall r \in \mathbb{Q}$

la fonction $x \longmapsto x^r$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et sa fonction dérivée est la fonction $x \longmapsto r \cdot x^{r-1}$

$$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$$

Corollaire :

$r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$

Une primitive sur $\mathbb{R}^*_+$ de $x \longmapsto x^r$ est $x \longmapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1}$

NETSCHOOL1 ACADEMY

Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$. On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(1) Déterminer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire une asymptote à $\mathscr{C}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x+1)^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2}{e^x} = \lim_{+\infty} \frac{x^2+2x+1}{e^x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{e^x}{x^2}}_{\to+\infty}} + \frac{2}{\underbrace{\frac{e^x}{x}}_{\to+\infty}} + \frac{1}{\underbrace{e^x}_{\to+\infty}} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty}$$

donc la droite d'équation $y=0$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $(+\infty)$

(2) a - Montrer que pour tout réel x , on a : $f'(x)=(1-x^2)e^{-x}$.

$$\boxed{\begin{aligned}(u\cdot v)' &= u' v + v' u\\ (e^u)' &= u' e^u\end{aligned}}$$

f est dérivable sur IR

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = 2(x+1)e^{-x} + (x+1)^2(-e^{-x})$$

$$= e^{-x}(\cancel{2x}+2-x^2-\cancel{2x}-1) = e^{-x}(1-x^2)$$

$$\boxed{f'(x) = (1-x^2)e^{-x}}$$

b - Dresser le tableau de variation de f .

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0

(3) a - La droite Δ d'équation $y=x$ coupe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse α , vérifier que : $1,4<\alpha<1,5$.

$f(1{,}4) \simeq \qquad > 1{,}4$

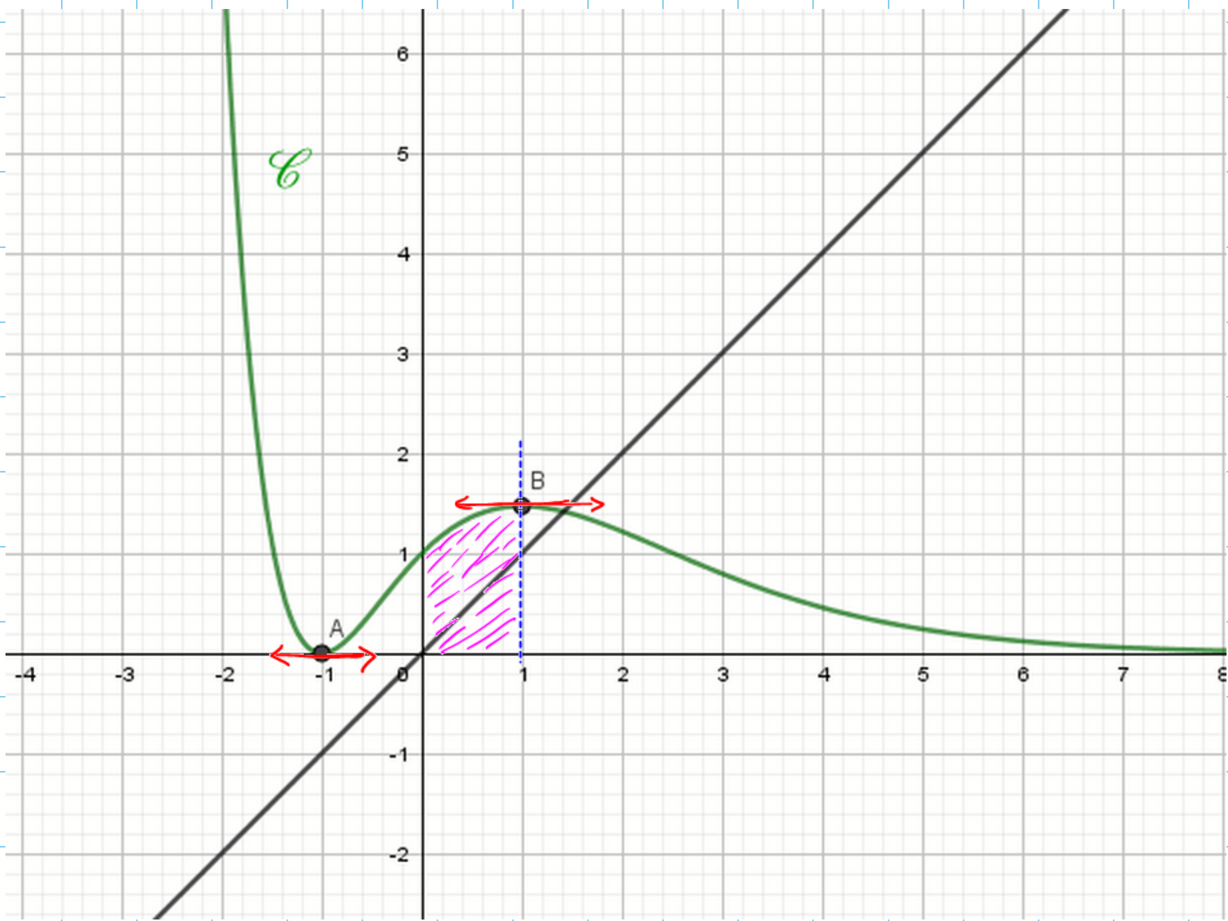
$f(1{,}5) \simeq \qquad < 1{,}5$

b - Tracer Δ et $\mathscr{C}$.

On a $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$; on cherche $\lim\limits_{-\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{-\infty} \frac{(x+1)^2}{x} \cdot e^{-x} = \lim_{-\infty} \underbrace{\left(x+2+\frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} \overbrace{e^{-x}}^{\to +\infty}$$
$$= -\infty$$

donc $(\mathscr{C})$ admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au $\mathcal{V}(-\infty)$



(4) Soit F la fonction définie sur IR par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$.

a - Déterminer a , b et c pour que F soit une primitive de f sur IR .

$F'(x) = (2ax+b)e^{-x} - (ax^2+bx+c)e^{-x}$
$= e^{-x}(2ax+b - ax^2 - bx - c)$

$$= \left(-ax^2 + (2a-b)x - c + b\right)e^{-x}$$

$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \left(-ax^2 + (2a-b)x - c + b\right)e^{-x} = (x+1)^2 e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -ax^2 + (2a-b)x - c + b = x^2 + 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 2 \\ -c + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \\ c = -5 \end{cases}$$

donc $\boxed{F(x) = (-x^2 - 4x - 5)\, e^{-x}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

b - Calculer l'aire du domaine limité par $\mathscr{C}$, les axes du repère et la droite d'équation $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_0^1$$

$$= F(1) - F(0) = (-1-4-5)e^{-1} - (-5) \times 1$$

$$= -10e^{-1} + 5$$

$$\boxed{\mathcal{A} = 5 - \frac{10}{e} \ u.a}$$

$a \neq 0$

$$x \longmapsto e^{ax} \xrightarrow{\text{primitive}} x \longmapsto \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$u'e^{u} \longrightarrow e^{u}$$

NETSCHOOL1 ACADEMY

$$\int_0^{1/2} (2x-1)\, e^{2x}\, dx \ ?$$

$$\begin{cases} u(x) = \ ? & (2x-1) \\ v'(x) = \ ? & e^{2x} \end{cases}$$

A L P E C

ln

polynômes

exp

circulaire

sin

cos

tg