Pour décrire le résultat d'une expérience aléatoire associée à un univers Ω, on fait souvent correspondre un nombre à chaque élément de Ω.

- **Exemple introductif**

Une urne contient 3 boules rouges et 4 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait simultanément 2 boules.

1) Déterminer card Ω =……………………...

2) On perçoit un dinar pour chaque boule rouge tirée. Désignons par X la somme gagnée à l'issue d'un tirage de 2 boules.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?..

b) Quelle est la probabilité de l'événement « gagner 0 dinar » ? On note cette probabilité p(X = 0).

………………………………………………………………………………………………………

c) Calculer de même p(X = 1) et p(X = 2).

………………………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………………

Les résultats précédents peuvent être présentés dans un tableau

Gain x_i	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
Probabilité $p_i = p(X = x_i)$			

Ce tableau défini **la loi de probabilité** de X.

- **Aléa numérique (Variable aléatoire). Loi de probabilité**

Définition :
Soit Ω un univers muni d'une probabilité p.
On appelle **aléa numérique X** défini sur Ω une application qui à chaque élément de Ω fait correspondre un nombre réel.
Désignons par X(Ω) l'ensemble des valeurs possibles de X.
$X(\Omega) = \{x_1; x_2; ....; x_n\}$.
La **loi de probabilité de X** est l'application qui à tout élément x de X(Ω) fait correspondre la probabilité que X prenne cette valeur x. Par abus de langage on dit que c'est la probabilité que « X soit égal à x ».

Il est commode de présenter cette loi de probabilité sous forme d'un tableau :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

- ***Exercice***

On place dans une urne six boules numérotés de 0 à 5, indiscernables au toucher. L'expérience consiste à tirer simultanément trois boules.

1. Quel est le nombre de tirages possibles.
2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, prend comme valeur le plus grand des numéros portés sur les trois boules tirées. Déterminer la loi de probabilité de X.

- **Espérance mathématique**

Définition

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

On appelle **espérance mathématique** de X le nombre E(X) défini par : E(X) = $\sum_{i=1}^{n}(p_i x_i)$.

Exemple

Soit X un aléa numérique dont la loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

x	0	1	2
$p(X=x)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{7}$

L'espérance mathématique de X est E(X) = ……………………………………………………………

Propriétés :

Soient X et Y deux aléas numériques définies sur Ω et a un réel. L'espérance des variables aléatoires X + Y et a X est donnée par :
E(X + Y) = E(X) + E(Y) et E(a X) = a E(X).

Variance, écart type

Variance :

Soit un aléa numérique X prenant les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ avec les probabilités $p_1, p_2, \ldots, p_n$.
On appelle **variance** de X, le nombre noté V(X) défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - E(X)^2.$$

Exemple

Calculons la variance de X de l'exemple précédent.

On sait que $E(X)=\frac{6}{7}$. D'où :

$$V(X)=\frac{2}{7}\left(0-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{4}{7}\left(1-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{1}{7}\left(2-\frac{6}{7}\right)^2$$

$$V(X)=\frac{140}{343}\approx 0{,}408$$

Ou bien $V(X)=\frac{2}{7}\times 0+\frac{4}{7}\times 1+\frac{1}{7}\times 4-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{8}{7}-\frac{36}{49}=\frac{20}{49}\approx 0{,}408$

Propriétés :

$V(X) \geq 0$.
$V(X + a) = V(X)$.
$V(a X) = a^2 V(X)$.

L'écart type

L'écart type d'un aléa numérique X est défini par : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Exercice 4 page 94.

▪ Fonction de répartition

Dans le cas de l'exemple du paragraphe (aléas numériques), on peut se poser les questions suivantes :
Quelle est la probabilité de gagner au plus deux dinars ? au moins un dinars ? etc.
La connaissance de la fonction de répartition permet de répondre à ces questions.

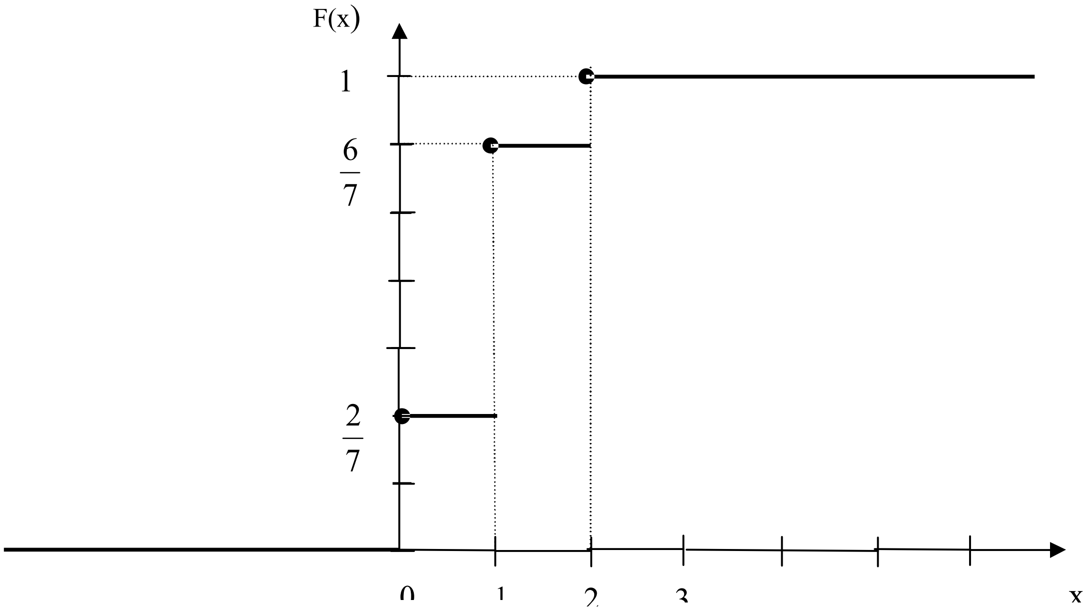
Définition

Soit un aléa numérique X défini sur un univers Ω muni d'une probabilité p.
La fonction de répartition F de X est la fonction de IR vers [0 ; 1] qui, à tout réel x, associe la probabilité que X soit inférieure ou égale à x :
$F(x) = p(X \leq x)$.
La fonction de répartition est constante par intervalles.

Exemple : Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

Intervalles des valeurs de x	Valeurs de X vérifiant $X \leq x$	F(x), c'est – à – dire $p(X \leq x)$, vaut :
$]-\infty;0[$	Aucune	0
$[0;1[$	0	$p(X=0)=\frac{2}{7}$
$[1;2[$	0 et 1	$p(X=0)+p(X=1)=\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7}$
$[2;+\infty[$	0, 1 et 2	$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=\frac{6}{7}+\frac{1}{7}=1$

Représentation graphique de F



Propriétés de la fonction de répartition

- ✓ F est une fonction en escalier ; F est une fonction croissante.
- ✓ A partir de F on peut retrouver la loi de probabilité de X.

  Exemple : p(X = 1) = F(1) – F(0) = $\frac{6}{7}-\frac{2}{7}=\frac{4}{7}$.

  Exercice 3 page 94.

- **Loi Binomiale :**

Exemple introductif :

On lance quatre fois de suite un jeton truqué dont les faces sont numérotés 0 et 1, avec la probabilité d'obtenir 1 est $\frac{3}{4}$.

- Chaque lancer est une épreuve ayant deux issues « 0 ou 1 »

  On a donc une répétition quatre fois de suite de la même épreuve dans les mêmes conditions et avec indépendance entre elles.

- Pour lune de ces quatre épreuves on appelle succès et on note S l'événement « obtenir 1 » et donc échec noté E l'événement « obtenir 0 »

  On a : p (S) = $\frac{3}{4}$ et P (E) = 1 – p (S) = $\frac{1}{4}$.

- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série de quatre lancers associe le nombre de succès réalisés, c. a. d « le nombre de fois où l'on a obtenu 1 »

  X (Ω)= $\{0,1,2,3,4\}$.

- $\{X=0\}$: les quatre numéros obtenus sont : (0, 0, 0, 0) c. a. d (E, E, E, E).

  $$\Rightarrow p(\{X=0\})=[p(E)]^4=\left(\frac{1}{4}\right)^4$$

- $\{X=1\}$: « Obtenir une seule fois le numéro 1 » ou bien « obtenir un seul succès »

  $\rightarrow$(S, E, E, E) ou (E, S, E, E) ou (E, E, S, E) ou (E, E, E, S).

  $$\Rightarrow p(X=1)=4\times p(S)\times[p(E)]^3=C_4^1\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$$

- $\{X=2\}$: « obtenir 2 succès pendant les quatre épreuves »

  $\rightarrow$(S, S, E, E) ou (S, E, S, E) ou (S, E, E, S).

  ou (E, S, S, E) ou (E, S, E, S) ou (E, E, S, S)

  $$\Rightarrow p(X=2)=C_4^2\times[p(S)]^2\times[p(E)]^2=C_4^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$$

  $C_4^2=6$ correspond au nombre de choix de 2 places parmi 4.

x_i	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^4$	$C_4^1\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$C_4^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$	$C_4^3\times\left(\frac{3}{4}\right)^3\times\left(\frac{1}{4}\right)$	$C_4^4\times\left(\frac{3}{4}\right)^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^0$

Définitions :

- On appelle schéma de Bernoulli, une suite d'épreuves identiques qui vérifient les conditions suivantes :
  - Chaque épreuve donne lieu à deux issues : « S » : succès et « E » : échec.
  - Les épreuves sont indépendantes les unes des autres.
  - La probabilité de S (respectivement de E) est la même pour chaque épreuve.
- Soit X l'aléa numérique qui à chaque série d'épreuves associe le nombre de succès obtenus.

  Si l'épreuve est répétée n fois alors X (Ω) = $\{0,1,2,.....,n\}$

  et on a pour tout $k \in \{0,1,......,n\}, p(X=k) = C_n^k \times [p(S)]^k \times [p(E)]^{n-k}$

  $\rightarrow$ on dit que X suit une loi binomiale de paramètre n et p = p (S) ou aussi une loi de Bernoulli qu'on note B (n, p).

  ### *Théorème :*

  Soit X un aléa numérique qui suit une loi binomiale de paramètres n et p.

  Alors E (X) = $n \times p$

  V (X) = $np(1-p) = n \times p \times q$ où $q = 1-p$

  σ (X) = $\sqrt{npq}$

Exercice :

Un sac contient dix boules indiscernables au toucher : six boules blanches numérotées 1, 1, 2, 2, 2, 2 et quatre boules noires numérotées 1, 1, 2, 2.

1- Une épreuve consiste à tirer simultanément et au hasard trois boules du sac. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

   S : « Tirer trois boules blanches »

   E : « Tirer au moins une boule noire »

   C : « La somme des chiffres marqués sur les trois boules tirées est égale à 5 ».

2- On répète l'épreuve précédente trois fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans l'urne.

   Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de fois où l'événement S est réalisé.

   a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   b) Calculer son espérance mathématique et son écart type.

   c) Calculer la probabilité de l'événement : « ($1 \leq X < 3$)

LOIS DE PROBABILITE CONTINUES :

Dans les exemples précédents, la variable aléatoire X prend des valeurs isolées $x_1, x_2, ..., x_n$. On dit que X est discrète.

Or dans les domaines économiques et industriels, on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre n'importe quelle valeur dans IR ou dans un intervalle de IR.

Exemple : La durée de vie d'une machine, avec l'intervalle $[0, +\infty[$.

Définition : Une variable aléatoire X est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre n'importe quelle valeur d'un intervalle I de IR.

On s'intéresse alors à des événements du type : « La valeur de X est comprise entre les réels a et b » Nous noterons $(a \leq X \leq b)$ un tel événement.

Densité : On appelle densité de probabilité continue la fonction f positive et continue sur [a, b] telle que :

$\int_a^b f(t)dt = 1$ et pour tous x et y de [a, b], on a p($x \leq$ X $\leq$ y) = $\int_x^y f(t)dt$.

Exemples de variables aléatoires continues

1) Loi uniforme :

Définition :

Soit un intervalle $[a, b]$. La fonction f définie sur $[a, b]$ par $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$ est appelée densité de la probabilité uniforme sur $[a, b]$.

On appelle probabilité uniforme sur $[a, b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a, b]$ associe le réel

$p([c, d]) = \int_c^d f(x)dx$.

Conséquences :

- $p([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \dfrac{1}{b-a}dx = 1$
- Pour tout réel x_0 de $[a, b]$ on a : $p(\{x_0\}) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$
- $p([a, b]) = p(]a, b]) = p([a, b[) = p(]a, b[)$.
- si on désigne par $\overline{[c, d]}$ le complémentaire de $[c, d]$ dans $[a, b]$, alors $p(\overline{[c, d]}) = 1 - p([c, d])$.

Définition : on dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $[a, b]$ suit la loi de probabilité uniforme p

si : $p(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = \dfrac{d-c}{b-a}$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi uniforme :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme p sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F : IR \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<a\\ p(a\le X\le x) & si\ \ x\in[a,b]\\ 1 & si\ \ x>b\end{cases}$$

2) Loi exponentielle :

Définition :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda\, e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application p qui :

- à tout intervalle $[c,d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $p([c,+\infty[)=\lim\limits_{x\to+\infty}\int_c^x \lambda e^{-\lambda t}dt=e^{-\lambda c}$

Propriétés :

1. pour tout réel $t>0$, $p([0,t])=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx=1-e^{-\lambda t}$.
2. $p([t,+\infty[)=1-p([0,t])=e^{-\lambda t}$.

Définition : on dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,

si : $p(c\le X\le d)=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx=e^{-\lambda c}-e^{-\lambda d}$ et $p(X\ge c)=e^{-\lambda c}$

Fonction de répartition d'une variable qui suit une loi exponentielle :

Définition :

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle p sur de paramètre λ.

On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: IR\mapsto[0,1]$ définie par :

$$F(x)=\begin{cases}0 & si\ x<0\\ p(0\le X\le x)=1-e^{-\lambda x} & si\ \ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Exercice rédigé :

On suppose que la durée de vie X d'une voiture suit une loi exponentielle de paramètre 0,1.

a) Calculer la probabilité qu'une voiture dépasse 10 ans de durée de vie :

$$p(X>10)=1-p(X\le 10)=1-\int_0^{10}0{,}1\,e^{-0{,}1t}dt=\frac{1}{e}.$$

b) On sait qu'une voiture a duré déjà 10 ans. Quelle est la probabilité qu'elle dépasse 12 ans de durée de vie ?

$$p(X>12\ /\ x>10)=\frac{p(X>12)}{p(X>10}=\frac{e^{-0{,}1\times 12}}{e^{-0{,}1\times 10}}=e^{-0{,}2}\simeq 0{,}82.$$

c) Comparer le résultat précédent avec la probabilité que la durée de vie de la voiture dépasse deux ans :

$$p(X>2)=1-p(X\le 2)=1-\int_0^{2}0{,}1\,e^{-0{,}1\,t}dt=e^{-0{,}2}\simeq 0{,}82$$

On constate que la probabilité que la voiture dure deux ans de plus ne dépend pas de son âge.
On dit que X est une loi de durée de vie sans vieillissement.