I. Rappels et compléments :

1. Définition de $\mathbb{C}$:

Théorèmes (admis)

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$
2. Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément i tel que : $\boxed{\boldsymbol{i^2} = \ \dots\dots}$
3. Tout $z \in \mathbb{C}$ s'écrit d'une manière unique $z = a + ib$ avec $\underline{a, b \ \in \mathbb{R}}$
4. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$

Définition

- L'écriture $z = a + ib$, a et b sont <u>deux réels</u>, s'appelle écriture .... ou .... de z
- $a = Re(z)$ est la partie .... de z
- $b = Im(z)$ est la partie .... de z

Propriétés

Soit z un nombre complexe. On a :

1. z est réel $\Leftrightarrow$ ………………………………
2. z est imaginaire $\Leftrightarrow$ …………………….

Propriétés (égalité de deux nombres complexes)

1. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes ($a_1,\ b_1, a_2\ et\ b_2 \in \mathbb{R}$). Alors
$z_1$et $z_2$sont égaux si et seulement si ....
2. En particulier, $z = a + ib = 0 \ \Leftrightarrow$ ……………………………………………………….

Attention

1. l'écriture $z = a + ib$ ne désigne une forme algébrique que si <u>a et b sont</u> ....
2. Les nombres complexes <u>n'ont pas de signe</u> c.-à-d. il n'y a pas de comparaison entre les nombres complexes
3. La partie imaginaire de $a + ib$ est ..... et non ib

* ***Application :***

(1) Ecrire sous forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 2 + 3i - (5 - 4i)\ ;\ z_2 = (1 + 2i)(2 - 3i)\ ;\ z_3 = (1 + i)^2\ ;\ z_4 = (1 - i)^2\ ;$$
$$z_5 = (4 + 2i)^3\ \ et\ z_6 = 2i - 3$$

(2) a) Calculer :

$i^1 = \dots$	$i^5 = \dots$	$i^9 = \dots$
$i^2 = \dots$	$i^6 = \dots$	$i^{10} = \dots$
$i^3 = \dots$	$i^7 = \dots$	$i^{11} = \dots$
$i^4 = \dots$	$i^8 = \dots$	$i^{12} = \dots$

b) En déduire i^n suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}^*$

c) Calculer alors i^{2020} et i^{2021}

(3) a) Montrer que $i^{-1} = -i$
b) En déduire que $i^{-n} = (-1)^n i^n$; $n \in \mathbb{N}^*$
c) Calculer i^{-4155}

2. Nombres complexes conjugués :

Définition

Soit $z = a + ib$; $a \; et \; b \in \mathbb{R}$

Le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z} =$ … … … … … …

Propriétés

- $\overline{z + z'} =$……………., pour tout z et $z' \in \mathbb{C}$
- $\bar{\bar{z}} =$ ……., pour tout $z \in \mathbb{C}$
- $z + \bar{z} =$ ……………… ; $z - \bar{z} =$ ………………, pour tout $z \in \mathbb{C}$
- pour tout $z \in \mathbb{C}$
  (z est réel) si et seulement si ($\bar{z} =$ ……)
  (z est imaginaire pur) si et seulement si ($\bar{z} =$ ……)
- $\overline{z \times z'} =$ ……………., pour tout z et $z' \in \mathbb{C}$
- $\overline{z^n} =$ ……., pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ ……… ; $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} =$ ………, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ ………, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}^*$
- $si \; z = a + ib \; (a \; et \; b \in \mathbb{R}) \; alors \; z\bar{z} =$ …………….

Remarque

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$; $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$

Cette écriture permet de mettre $\frac{1}{z}$ sous la forme algébrique

Exemple : Mettre sous forme algébrique $z = \frac{4+2i}{1+i}$

* ***A faire : Exercices 1 et 2 page 19***

3. Affixe d'un point – affixe d'un vecteur :

Définition

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- ☒ A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associer un point unique $M\ (a, b)$, appelé point ……………………………… et on le note $M(z)$.
- ☒ A tout point $M\ (a, b)$ du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z =$ ……………………., appelé ………………………… de M. On le note z_M.

Remarques

1. La notation $M(z)$ se lit alors «M ………………………… z».
2. Le nombre complexe $z = 0$ a pour image le point …….

Théorème

Soit P un plan rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

☒ A tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut lui associer un vecteur unique $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, appelé vecteur .... et on le note $\vec{w}\,(z)$.

☒ A tout vecteur $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ du plan, on peut lui associer un unique nombre complexe $z\ =$ ...., appelé .... de $\vec{w}$. On le note $z_{\vec{w}}\ ou\ aff(\vec{w})$.

Remarques

1. Le complexe $z = 0$ a pour image le vecteur ....
2. Deux points du plan sont confondus si et seulement si ....
3. z est réel si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe ....
4. z est imaginaire pur si et seulement si $M(z)$ appartient à l'axe ....

Propriétés

1. Si I est le milieu de $[AB]$ alors $z_I =$ ....
2. $\vec{w} = \vec{w'}$ si et seulement si ....
3. $aff(\overrightarrow{AB}) =$ ....
4. $aff(\alpha\vec{w_1} + \beta\vec{w_2}) =$ .... ; $(\alpha\ et\ \beta \in \mathbb{R})$

Propriétés

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$

1. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ....
2. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si ....

A faire : exercice 8 page 19

4. *Module d'un nombre complexe* :

Définition

On appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ le réel positif noté $|z|$ définie par :

$$|z| = \text{.................................}$$

Interprétation géométrique

Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1. Soit $M(z)$; $|z| =$ … … … … ….
2. Pour tout points A et B d'affixes respectives $z_A\ et\ z_B$: $AB =$ ....

Applications :

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :

a) $|z - 1 + i| = 2$

b) $|z - 2i| = |z + 3i|$

Propriétés

Pour tout $z \in \mathbb{C}$	Pour tous nombres complexes z et z'	Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $z' \in \mathbb{C}$
• $z\bar{z} =$ .... • $\lvert\bar{z}\rvert =$ .... • $\lvert -z\rvert =$ .... • $\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow$ .... • $pour\ tout\ réel\ \lambda$: $\lvert\lambda z\rvert =$	• $\lvert z + z'\rvert \leq$ .... • $\lvert z \times z'\rvert =$ .... • $\lvert z^n\rvert =$ .... ; $(n \in \mathbb{N}^*)$	▪ $\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert =$ …….. ▪ $\left\lvert\frac{z'}{z}\right\rvert =$ ……..

• Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$: $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\dots\dots}$		■ $\left\lvert\frac{1}{z^n}\right\rvert = \dots\dots\dots$; $(n \in \mathbb{Z})$

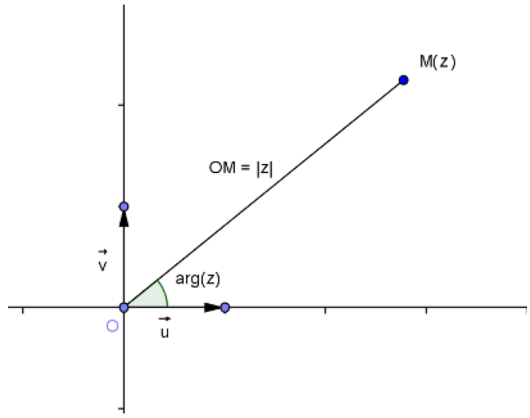
* ***Application :*** **activité 7 page 10**
* ***A faire : exercice 9 page 19***

5. *Argument d'un nombre complexe non nul :*

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et M son image
On appelle <u>argument</u> de z, on note ...., toute mesure en radian de l'angle ....

On note ....≡ ....[2π]



Exemples

$\arg(1+i) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(2i) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(-3) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(-1-i) \equiv \dots\dots [2\pi]$
$\arg(1) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(-1) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(i) \equiv \dots\dots [2\pi]$; $\arg(-i) \equiv \dots\dots [2\pi]$

Remarques

1) 0 n'a pas d'argument.
2) Deux arguments d'un même nombre complexe non nul différent d'un multiple de 2π
   Si α et β sont deux arguments de z, on a : $\alpha \equiv \beta\ [2\pi]$

Propriétés (P1)

1. a) z est réel strictement positif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots\dots\ [2\pi]$
   b) z est réel strictement négatif $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots\dots\ [2\pi]$
   c) z est réel non nul $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots\dots\ [\dots\dots]$
2. z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z) \equiv \dots\dots\ [\dots\dots]$
   a) $y \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg(iy) \equiv \dots\dots\ [2\pi]$
   b) $y \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg(iy) \equiv \dots\dots\ [2\pi]$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
Construire l'ensemble des points $M(z)$ tel que $\arg(z) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$

Propriétés (P2)

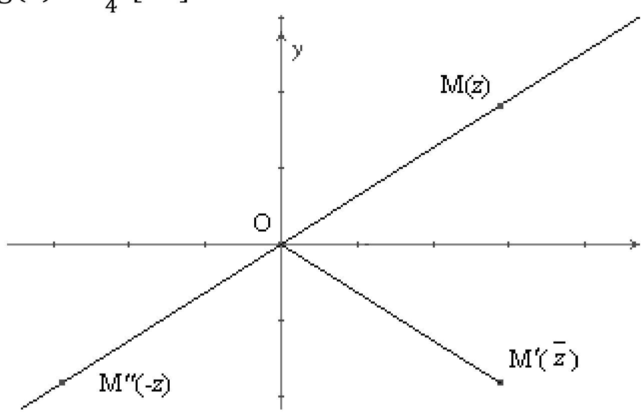
Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

$\arg(\bar{z}) \equiv \dots\dots\dots\dots\dots\ [2\pi]$

$\arg(-z) \equiv \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ [2\pi]$

$\arg(\alpha z) \equiv \dots\dots\dots\dots\dots\ [2\pi]$

$\arg(-\alpha z) \equiv \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ [2\pi]$



Propriétés (P3)

$$\boxed{\arg(z_B - z_A) \equiv \ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\ [2\pi]}$$

Exercice

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit les points $A(4,1) et\ B(3,2)$

Trouver une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{AB})$

* ***A faire : exercice 12 page 20***

6. Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

Théorème

Tout nombre complexe non nul z s'écrit sous la forme $z = r(cos\theta + isin\theta)$ avec $r =$ … …. et $\theta \equiv$ … … … … … …

Réciproquement : si le nombre complexe z s'écrit $z = r(cos\theta + isin\theta)$ avec $r > 0\ et\ \theta \in \mathbb{R}$ alors $r =$ … …. et $\theta \equiv$ … … … … … …

Définition

L'écriture $z = r(cos\theta + isin\theta)$ avec $r > 0$ s'appelle ………………………………………………………………… de z

On note aussi : $z = [r,\theta]$

Exemples

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $z = a(cos\theta + isin\theta)$. Trouver la forme trigonométrique de z
2. Soit $z = r(sin\theta + icos\theta)$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver la forme trigonométrique de z

Propriété

Pour tout $z\ et\ z' \in \mathbb{C}^*$: $z = z' \Leftrightarrow\ |z| =$ … … … et $\arg(z) \equiv$ … … ….

Propriété (relation entre forme algébrique et forme trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Supposons $z = a + ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)\ (r > 0), on\ a$:

$$r = \ \dots\dots = \dots\dots\dots\dots\dots.\ ;\ cos\theta = \ \dots\dots\ \ et\ sin\theta = \ \dots\dots$$

Exercice

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ ;\ z_2 = -8 + 8i$$

Propriétés

1) $[r,\theta] \times [r',\theta'] =$ … … … … … ; $\arg(zz') \equiv$ … … … … … … … … … … . . $pour\ tous\ z\ et\ z' \in \mathbb{C}^*$
2) $\frac{1}{[r,\theta]} =$ … … … … … …. ; $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv$ … … … … pour tout $z \in \mathbb{C}^*$
3) $\frac{[r,\theta]}{[r\prime,\theta\prime]} =$ … … … … … ; $arg\left(\frac{z}{z\prime}\right) \equiv$ … … … … … … … … … $pour\ tous\ z\ et\ z' \in \mathbb{C}^*$
4) $[r,\theta]^n =$ … … … … … … ; $arg(z^n) \equiv$ … … … … …. ; pour tout $z \in \mathbb{C}^*\ et\ n \in \mathbb{Z}$
5) Si $z = [r,\theta]$ alors $-z =$ … … … … … …. $et\ \bar{z} =$ … … … … … … … … . .

Application :

Soit $z_1 = 1 + i\sqrt{3}\ et\ z_2 = 1 + i$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
2. Soit $z = \frac{z_1}{z_2}$. donner l'écriture trigonométrique puis l'écriture algébrique de z
3. En déduire les valeurs exactes de $cos\frac{\pi}{12}\ et\ sin\frac{\pi}{12}$

* ***A faire : activité 14 page 13***

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe :

Notation

On désigne par $\boldsymbol{e^{i\theta}}$, on lit **exponentielle $\boldsymbol{i\theta}$**, le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

$$\boxed{e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta = [1, \theta]}$$

Exemples

$$e^{i0} = \dots\dots \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots \quad ; \quad e^{i\pi} = \dots\dots \quad ; \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \dots\dots$$

* Activité 2 page 14 :

Propriétés

Pour tout θ et $\theta' \in \mathbb{R}$

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{1}{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots \quad ; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = \dots\dots\dots (n \in \mathbb{Z})$$

$$\overline{e^{i\theta}} = \dots\dots\dots \quad ; \quad -e^{i\theta} = \dots\dots\dots\dots \quad ; \quad e^{i(\theta+2k\pi)} = \dots\dots\dots\dots (k \in \mathbb{Z})$$

Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = [r, \theta] = r(cos\theta + isin\theta), r > 0$

La **forme exponentielle** de z est donc $z = \dots\dots\dots\dots\dots$

Application :

Ecrire sous forme exponentielle :

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad z_2 = -3e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z_3 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{37} \quad ; \quad z_4 = ie^{i\frac{\pi}{5}}$$

* ***A faire : exercices 17,18 et 24 pages 20 et 21***

III. Nombres complexes et trigonométrie :

Formule de Moivre

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{(cos\theta + isin\theta)^n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

Application :

Exprimer $cos4x$ et $sin4x$ en fonction de $cosx$ et $sinx$

↪ **Rappels**

- *Formule du Binôme de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Où $C_n^k = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Exemple : $(a+b)^4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$$= \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- *Triangle de Pascal*

n = 0	1					
n = 1	1	1				
n = 2	1	2	1			
n = 3	1	3	3	1		
n = 4	1	4	6	4	1	
n = 5	1	5	10	10	5	1
⋮						

Exemple : $(\mathrm{a}+\mathrm{b})^5 =$ …

Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\boxed{cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad ; \quad sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Application :

Linéariser cos^5x ; $x \in \mathbb{R}$

Remarque exercice 22 page 21

* ***A faire : exercice 25 page 21***