I. Rappels :

Soit f une fonction dont le domaine de définition est D

- ✓ On ne peut pas étudier la limite de f en x_0 que lorsque $x_0 \in D$ ou bien $x_0 \notin D$ mais x_0 est une borne de D
- ✓ Trouver la limite de f en x_0, c'est étudier le comportement de $f(x)$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de x_0

$$on\ note\ \lim_{x\to x_0} f(x)\ ou\ \lim_{x_0} f$$

1. *Théorèmes* :

a) Si une fonction admet une limite alors cette limite est ....

b) Soit x_0 un réel ; $\lim_{x_0^+} f = \lim_{x_0^-} f = l \Leftrightarrow \lim_{x_0} f = ...$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{|x-1|}$

1) Déterminer $\lim_{1^+} f$ et $\lim_{1^-} f$
2) La fonction f admet-elle une limite en 1 ?

2. *Limites de fonctions trigonométriques* :

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = ...$; $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = ...$ $(a \in \mathbb{R})$; $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = ...$;

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ...$; $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = ...$; $\lim_{x\to 0} \frac{\tan ax}{x} = ...$ $(a \in \mathbb{R})$

3. *Opérations sur les limites :*

On admet les théorèmes résumés dans les tableaux (T1), (T2) et (T3) suivants et concernant la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de fonctions

Soientx_0, l et l' des réels

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I de centre x_0 ou sur $I\backslash\{x_0\}$ ou sur un intervalle du type $]a,+\infty[$ ou sur un intervalle du type $]-\infty,a[$ (a est un réel)

Quand le réel x tend vers x_0 ou vers ${x_0}^+$ ou vers ${x_0}^-$ ou vers $+\infty$ ou vers$-\infty$, on a les résultats consignés dans les tableaux suivants :

- **Tableau (T1)** relatif à la limite d'une **somme** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f+g$ a pour limite
l	l'	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

- **Tableau (T2)** relatif à la limite du **produit** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f\times g$ a pour limite
l	l'	
$l>0$	$+\infty$	
$l>0$	$-\infty$	
$l<0$	$+\infty$	
$l<0$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	

$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
0	$+\infty$ ou $-\infty$	

Remarque : ces résultats se généralisent à une somme finie ou à un produit fini de fonctions

- Tableau (T3) relatif à la limite du **quotient** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $\frac{f}{g}$ a pour limite
l	$l' \neq 0$	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' > 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$l > 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l > 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
0	0	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	

4. ***Théorèmes :***

a) Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) =$ ....

b) Soit g une fonction rationnelle : $g(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ $(a_n \neq 0 \; et \; b_p \neq 0)$

Alors $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) =$ ....

5. ***Théorème :***

$l \in \mathbb{R}$

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert D, sauf peut être en un réel x_0 de D.

a) Si $\lim\limits_{x_0} f = l$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt{f} =$ ......

b) Si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} \sqrt{f} =$ ....

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ $(a \in \mathbb{R})$

a) Si $\lim\limits_{+\infty} f = l$ alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{f} =$ ....

b) Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \sqrt{f} =$ ....

✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]-\infty, a[$ $(a \in \mathbb{R})$

a) Si $\lim\limits_{-\infty} f = l$ alors $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{f} =$ ....

b) Si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} \sqrt{f} =$ ....

* ***Application : Activité 7 page 8***

6. Continuité en un point x_0:

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de centre x_0

f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x_0} f =$ ....

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en $x_0 \in I$

S'il existe une fonction g définie sur I, continue en x_0 et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors :

$\lim_{x \to x_0} f(x) =$ ....

Théorème 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en $x_0 \in I$

Si $\lim_{x_0} f = l$ (l fini) alors la fonction g définie sur I par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ x \neq x_0 \\ g(x_0) = l \end{cases}$ est

……………………………..

On dit que f est ………………………………………………………………………………….., et que g son

……………………………………..

* **Application : Activité 3 page 7**

7. Continuité à gauche - continuité à droite :

Théorèmes

a) Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0, x_0 + h[$ $(h > 0)$

f est continue à droite en x_0 si et seulement si ………………………………………………………………………..

b) Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]x_0 - h, x_0]$ $(h > 0)$

f est continue à gauche en x_0 si et seulement si ………………………………………………………………………..

c) Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant x_0

f est continue en x_0 si et seulement si ………………………………………………………………………..

* **Application : Activité 4 page 7**

8. Continuité sur un intervalle :

Théorèmes a et b sont deux réels tels que $a < b$

a) Une fonction f est continue sur $]a, b[$ si et seulement si

………

b) f est continue sur $[a, b[$ si et seulement si

………

c) f est continue sur$]a, b]$ si et seulement si

………

d) f est continue sur$[a, b]$ si et seulement si

………

Retenons

1. Toute fonction polynôme est continue sur …………
2. Toute fonction rationnelle est continue sur ………………………………………………………………………………
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur …………
4. Les fonctions $x \mapsto cos(ax + b)$ et $x \mapsto sin(ax + b)$ sont continues sur ……… $(a \in \mathbb{R}^*\ et\ b \in \mathbb{R})$
5. La fonction $x \mapsto tanx$ est continue sur ………………………………………………………………………………
6. La fonction $x \mapsto cotanx$ est continue sur ………………………………………………………………………………

9. Théorèmes :

Si f et g sont deux fonctions continues en x_0 alors :

a) αf $(\alpha \in \mathbb{R})$; $|f|$; $f+g$; $f \times g$ et f^n $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont ………………………………………………………………

b) Si de plus g ……………………………………………………………………alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues en x_0

c) Si de plus $f(x_0)$ …………………………………………………………… alors $\sqrt{f}$ est continue en x_0

* ***Application : Activité 6 page 7***

II. Continuité et limite d'une fonction composée :

1. Composée de deux fonctions :

* Activité 1 page 9 :

↪ La fonction h se note $\boldsymbol{g \circ f}$ et on lit $\boldsymbol{g}$ **rond** $\boldsymbol{f}$

La fonction k se note $\boldsymbol{f \circ g}$ et on lit ……………………

On remarque que : $g \circ f$ … … $f \circ g$

Définition

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les ensembles I et J tel que $f(I) \subset J$

La fonction, notée $\boldsymbol{g \circ f}$, définie sur I, par $\boldsymbol{g \circ f(x)} =$ … … … … …. s'appelle **fonction composée** de f et g

Exemple

Soit $f(x) = \frac{1}{x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$

1) Déterminer les domaines de définitions de : $f, g, g \circ f$ et $f \circ g$.
2) Expliciter $g \circ f(x)$ et $f \circ g(x)$

* ***Application : Activité 2 page 9***

2. Continuité d'une fonction composée :

Théorème ***(admis)***

Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur les intervalles ouverts I et J contenant respectivement x_0 et $f(x_0)$

Si ………………………………………………………… et …………………………………………………………… alors $g \circ f$ est continue en x_0

Corollaire

$$\text{Si } \left.\begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \end{array}\right\} \text{ alors } g \circ f \text{ est continue sur } I$$

* ***Application : Activité 3 page 9***

3. Limite d'une fonction composée :

Théorème ***(admis)***

Soit f et g deux fonctions

$$si \lim_{x \to a} f(x) = \boldsymbol{b} \; et \; \lim_{x \to \boldsymbol{b}} g(x) = c \; alors \; \lim_{x \to a} g \circ f = \; \ldots\ldots (a, b \; et \; c \; finis \; ou \; infinis)$$

Exemple : $h(x) = cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$; $\lim\limits_{+\infty} h = ?$

* ***A faire : Exercice 12 page 20***

III. Limites et ordre :

Théorèmes

Soit f, g et h des fonctions définies sur un intervalle I

x_0 désigne un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$; ℓ et $\ell' \in \mathbb{R}$

- ✓ *Si* $f(x) \leq g(x)$; $x \neq x_0$ *et si* $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim\limits_{x_0} g = \ell'$ *alors* … … … …
- ✓ *Si* $f(x) \geq 0$ *et* $\lim\limits_{x_0} f = \ell$ alors ℓ … … 0
- ✓ Si $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = \lim\limits_{x_0} h = l$ (l ***fini***) alors $\lim\limits_{x_0} f = \ldots\ldots.$
- ✓ Si $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = \ldots\ldots$
- ✓ Si $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x_0} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x_0} f = \ldots\ldots$
- ✓ *Si* $|f(x) - l| \leq g(x)$*et* $\lim\limits_{x_0} g = 0$ alors $\lim\limits_{x_0} f = \ldots\ldots$

Applications :

1) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$

2) a) Montrer que pour tout réel x non nul, $\left|x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq |x|$

   b) En déduire : $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

3) soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x + 2x$. Etudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Rappels :

- ✓ l'image d'un intervalle par une fonction continue est ……………………………………
- ✓ ***Théorème des valeurs intermédiaires :***

  Soit f est une fonction **continue** sur un intervalle I. a et b deux réels de I tels que $a < b$

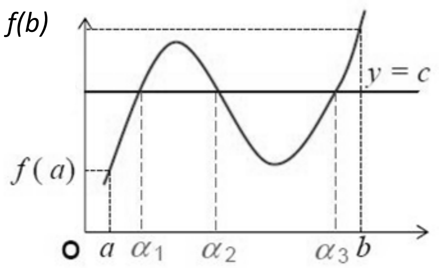
  Pour tout réel c compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = c$ admet aux moins une solution $\alpha \in [a, b]$

  Corollaire1

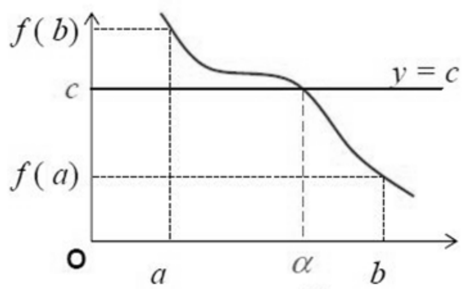
  Si f est continue sur $[a, b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$ alors ……………………………………………………………………………

  ………

  Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors α est ……………….



f est continue mais n'est pas monotone sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c peut avoir plusieurs solutions



f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle [a ; b] .
L'équation f (x) = c admet une solution unique .

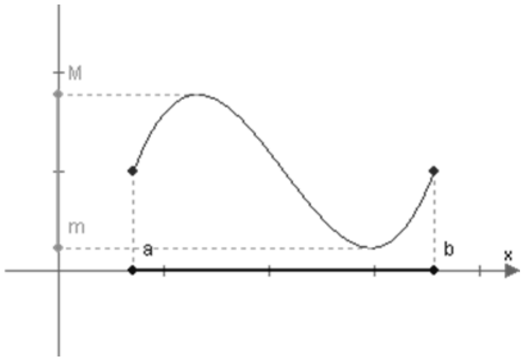
Corollaire2

Si f est continue sur $[a,b]$ et ne s'annule pas alors ……………………………………………………………………………………

* ***Application : Activité 5 page 13***

Théorème

L'image d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ par une fonction continue est ………………………………………………
………………………………………



V. Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Théorème 1 ***(admis)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[a,b[$ (b fin ou infini)

Si f est croissante et majorée alors ….

Si f est croissante et non majorée alors ….

Si f est décroissante et minorée alors ….

Si f est décroissante et non minorée alors …

Théorème 2

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I ; a et $b \in \mathbb{R}$ / $a < b$

I	$si\ f\ est\ strictement\ croissante\ alors\ f(I) =$	$si\ f\ est\ strictement\ décroissante\ alors\ f(I) =$
$[a,b]$		
$[a,b[$		
$]a,b]$		
$]a,b[$		
$[a,+\infty[$		
$]-\infty,b[$		
$\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$		

Exemple : $f(x) = tanx$; $I = \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $f(I) = ?$

* ***A faire :*** **Exercices 26 et 24 page 22 + QCM et Vrai ou Faux p18**

NETSCHOOL1