I. INTRODUCTION ET DEFINITION

Tous les nombres positifs ont une racine carrée, par exemple, 9 a pour racine 3 et –3 et 2 a pour racine $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$.
Par contre, aucun réel négatif n'a de racine (réelle).
C'est pour pallier à cette discrimination que furent créer les nombres complexes.

Le nombre *i* :

On appelle i un nombre dont le carré est –1. On décrète que i est la racine de -1. Ainsi : $i^2 = -1$
De plus, son opposé $-i$ a aussi pour carré -1. En effet : $(-i)^2 = [(-1) \times i]^2 = (-1)^2 \times i^2 = -1$
Conclusion : Les deux racines de -1 sont deux nombres irréels i et $-i$.
Le nombre i est appelé nombre imaginaire.
La forme factorisée de $x^2 + 1$ est $(x + i) . (x - i)$

Définition

On appelle corps des nombres complexes, et on note $\mathbb{C}$ un ensemble contenant $\mathbb{R}$ tel que :
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un élément noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $a + ib$, où a et b sont des réels.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que celles connues dans $\mathbb{R}$

Un nombre complexe sera souvent représenté par la lettre z.

Nombres complexes particuliers

Soit un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.
- si $b = 0$, on a $z = a$, z est un réel.
- si $a = 0$, on a $z = ib$, on dit que z est un imaginaire pur (on dit parfois simplement imaginaire).

Remarques

- $\mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points sur une droite.
  Un nombre réel x correspond au point d'abscisse x sur la droite.
  On peut donc toujours comparer deux nombres réels.
- $\mathbb{C}$, ensemble des nombres $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond à l'ensemble des points d'un plan.
  Un nombre complexe $a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ correspond au point du plan de coordonnées (a ; b).
  On ne peut donc pas comparer deux nombres complexes : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$.
  On ne peut donc pas dire qu'un nombre complexe z est inférieur à un nombre complexe z' ou qu'un nombre complexe z est positif (c'est-à-dire supérieur à 0).

Définition :

Soit un nombre complexe z .
L'écriture $z = a + ib$, où a et b sont des réels, est appelée forme algébrique ou cartésienne du nombre complexe z.
a est appelé partie réelle de z, et b partie imaginaire de z : on note $a = Re(z)$ et $b = Im(z)$.

Remarque

- La partie réelle de z et la partie imaginaire de z sont des nombres réels.

Propriété :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
C'est-à-dire que si a, b, a', b' sont des réels, on a

$$a + ib = a' + ib' \iff (a ; b) = (a' ; b') \iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Exercice : 1

Soit $z = 2 + 3i$; $z' = i - 5$.
Calculer et écrire sous la forme algébrique $z + z'$; $z - z'$; $2z - 3z'$; zz' ; z^2

Exercice : 2

Calculer $(3 + 2i)(3 - 2i)$. En déduire la forme algébrique de $\frac{1}{3 + 2i}$.

II. REPRESENTATION GRAPHIQUE

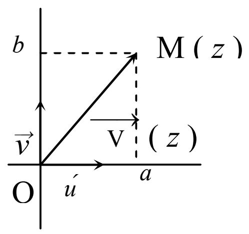
Un nombre complexe est formé de deux nombres réels. Or deux nombres réels forment un couple de coordonnées. Ainsi, si le plan est muni d'un repère orthonormé on peut repérer tout point par un nombre complexe.

a) Affixe

Définition :

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- Au point M de coordonnées (a ; b), on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
  On dit que $z = a + i b$ est l'affixe de M
- Au vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées (a ; b), on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
  On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de $\overrightarrow{V}$
- Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.



Exercice : 3

Placer dans le plan complexe, les points d'affixes :
$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 + i$; $z_3 = -1 + 2i$; $z_4 = 2 - i$; $z_5 = i$
$z_6 = -i$; $z_7 = 1$; $z_8 = -i - 3$; $z_9 = 2z_1 - 3z_2$; $z_{10} = z_3(z_4 - z_2)$

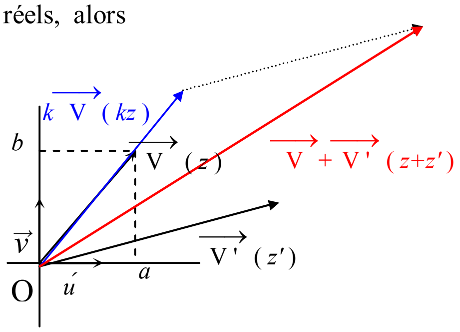
Propriétés

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors

- le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$
- $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$
- le milieu I de [MM'] a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$

Si $\overrightarrow{V}$ a pour affixe z et $\overrightarrow{V'}$ pour affixe z', alors $\overrightarrow{V} + \overrightarrow{V'}$ a pour affixe $z + z'$.

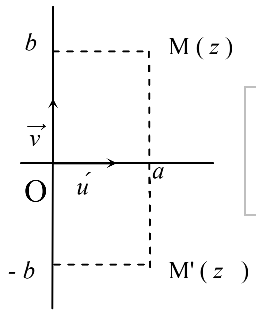
Si k est un réel, alors $k\overrightarrow{V}$ a pour affixe kz.



b) Conjugué

Définition

Soit z un nombre complexe de forme algébrique a + ib.
On appelle conjugué de z le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que $\bar{z} = a - ib$.



Si M est le point d'affixe z, le point M' d'affixe $\bar{z}$ est symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Exercice : 4

Étant donné un point M d'affixe $z = a + ib$, avec a et b réels.
Placer le point M' d'affixe $z' = a - ib$, M'' d'affixe $z'' = -a + ib$ et le point M''' d'affixe $z''' = -a - ib = -z$.

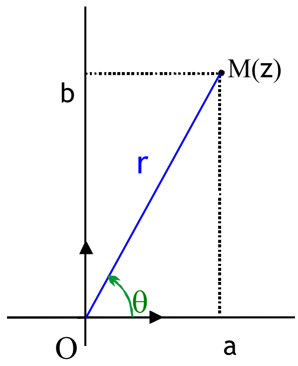
Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $z.\overline{z}$ est un réel positif
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$
- Si $z' \neq 0$ $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
- $\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$; $\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
- z est réel $\Leftrightarrow$ $z = \overline{z}$; z est imaginaire pur $\Leftrightarrow$ $z = -\overline{z}$

Exercices : 1, 2, 3 et 8 page 19 .

III. FORME TRIGONOMETRIQUE



a) Module

Définition

Tout nombre complexe non nul z peut-être écrit sous la forme :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, qui est une forme trigonométrique de z.

Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta'[2\pi] \end{cases}$$

Définition

Soit le nombre complexe z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.

On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$

On note $r = |z|$

Exercice : 5

1°)Calculer le module de chacun des nombres complexes :

$z_1 = 3 + 4i$ $z_2 = 1 - i$ $z_3 = 5 - \frac{i}{2}$ $z_4 = 3$

$z_5 = i - 4$ $z_6 = i$ $z_7 = -5$ $z_8 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

2°)Donner les formes trigonométriques de :

$z_1 = 1 + i$ $z_2 = \sqrt{3} + i$ $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$ $z_4 = i$

Propriété

Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe z , on a $\|\vec{V}\| = |z|$.

Soient A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B, on a $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice : 6

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2 - 3i$ et $b = 5 - i$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

Exercices : 9 et 11 page 19

Propriétés

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|-z| = |z|$; $|\overline{z}| = |z|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

$|zz'| = |z|.|z'|$; $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$; si $z' \neq 0$ alors $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$z\overline{z} = |z|^2$ (donc $z\overline{z} \in \mathbb{R}_+$) ; si $z \neq 0$ alors $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Exercices 5 et 7 page 19.

b) Argument

Définition

Soit le nombre complexe non nul z de forme algébrique a + ib et soit M le point d'affixe z.

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que $\theta \equiv (\vec{u}, \overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

On note $\theta \equiv \arg(z)\ [2\pi]$

Remarque

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est-à-dire modulo 2π .

Propriétés

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls, on a :

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z\quad [2\pi]$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z'\quad [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg z\quad [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z\quad [2\pi]$
- $\arg(-z) \equiv \arg z + \pi\quad [2\pi]$

Exercice : 7

Soit $z_1 = 2 + 2i$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$. Écrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

En déduire les formes trigonométriques de $z_1 \times z_2$; $\frac{z_1}{z_2}$; $(z_1)^3$; $\overline{z_1}$; $-z_2$; $\frac{(z_1)^2}{\overline{z_2}}$

Exercices : 15 et 16 page 20 ; 27 page 21.

Propriétés

Soient $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{V'}$ d'affixes respectives z et z' dans le plan complexe rapporté au repère $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Si z et z' ont pour formes trigonométriques : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, Alors :

- $(\vec{u}, \overrightarrow{V}) = \theta = \arg z \quad [2\pi]$.
- $(\overrightarrow{V}, \overrightarrow{V'}) = \theta' - \theta = \arg z' - \arg z \quad [2\pi]$.

A, B, C et D étant des points distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D dans le plan complexe de repère$(O;\vec{u},\vec{v})$, alors :

- le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$, et on a : $AB = |z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi]$.

c) Ecriture exponentielle

Notation

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on note $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ et par conséquent pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$
Cette notation est appelée notation exponentielle.

Propriétés

Les résultats déjà vus s'écrivent, avec la notation exponentielle :

$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ $\qquad \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(-\theta)} = e^{-i\theta}$ $\qquad \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta},\ n \in \mathbb{Z}$ $\qquad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ $\qquad -e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Remarques

- La propriété $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$, facile à retenir, permet de retrouver les formules d'addition :
  $\cos(\theta+\theta') = \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'$ et $\sin(\theta+\theta') = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$
- La propriété $(e^{i\theta})^2 = e^{2i\theta}$ permet de retrouver les formules de duplication :
  $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$
- On peut vérifier que : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Ce sont les formules d' **EULER**.
- La relation $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$ est appelée formule de **MOIVRE**.

Exercice 8

On considère les nombres complexes : $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

1°)Donner la forme exponentielle de Z.
2°)Donner les formes algébriques de z_1 et z_2. En déduire la forme algébrique de Z.
3°)En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

Activités 3, 4et 6 pages 15 et 16.
Exercices : 17, 18, 19, 21, 22, 23 pages 20 et 21.

IV. Complexes et configurations géométriques

$\frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$ [2π].

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0$ $\Leftrightarrow$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}$ [□]
  $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{2}$ [□] $\Leftrightarrow$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur
- A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$, $k \in \mathbb{R}$
  $\Leftrightarrow$ $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0$ [□]

Exercice 11 page 19.