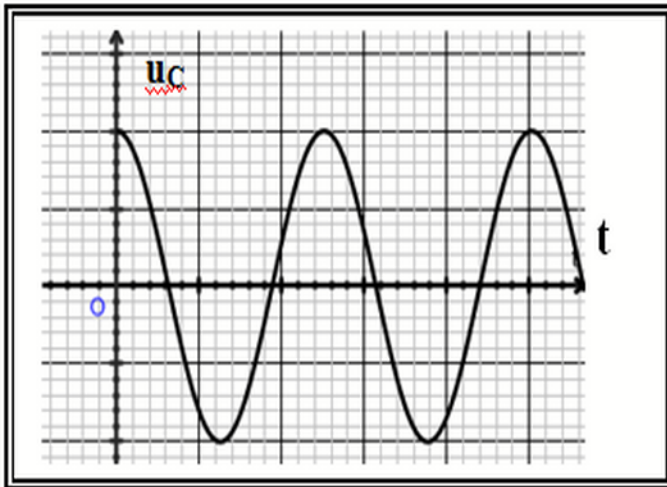
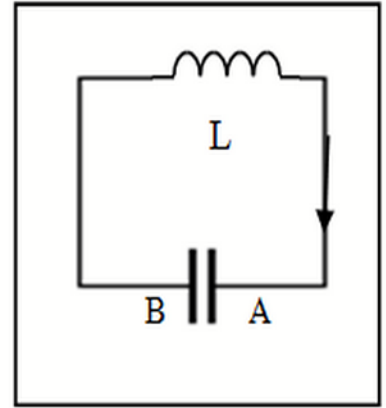


Exercice :

Un condensateur de capacité $C = 100\mu\text{F}$ est chargé à l'aide d'un générateur de f.e.m E_0 . Quand la charge du condensateur est maximale, on l'isole du générateur et on relie ses bornes A et B à celle d'une bobine d'inductance L et de résistance négligeable. A l'aide d'un oscilloscope on visualise la tension u_{AB} aux bornes du condensateur. On obtient l'oscillogramme de la figure suivante.



- Sensibilité verticale est 2V/div
- Sensibilité horizontale est $0,8\text{ ms/div}$.

- 1) a- Etablir l'équation différentielle qui régit la tension u_{AB} aux bornes du condensateur.
b- Justifier alors l'allure de l'oscillogramme.
c- Expliquer pourquoi les oscillations d'un tel circuit sont dites libres non amorties.
d- Déterminer la période propre T_0 et la valeur maximale de la tension u_{AB} puis écrire l'expression de $u_{AB}(t)$.
- 2) Etablir les expressions en fonction du temps :
 - a- De la charge q du condensateur.
 - b- De l'intensité i du courant qui circule dans le circuit.
 - c- Représenter sur le même système d'axe $q(t)$ et $i(t)$.

1a. loi des mailles:

$$u_{AB} + u_{BA} = 0$$

$$u_{AB} + L \frac{di}{dt} = 0$$

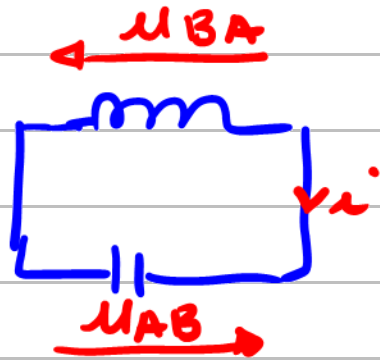
$$\text{or } i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_{AB}}{dt}$$

$$u_{AB} + LC \frac{d^2 u_{AB}}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2 u_{AB}}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_{AB} = 0$$

$$\text{posons } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\frac{d^2 u_{AB}}{dt^2} + \omega_0^2 u_{AB} = 0. \quad (1)$$



NETSCHOOL
ACADEMY

b. L'équation (1) est celle d'un oscillateur libre non amorti. Elle admet

une solution particulière de la forme

$$u_{AB}(t) = U_{ABm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB})$$

d'où les oscillations dans le circuit LC sont sinusoïdales (libres non amorties)

e. libres: se font sans intervention

d'un générateur (sans excitateur)

amorties: L'amplitude reste

constante.

$$d. T_0 = 2,5 \times 0,8 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ s.}$$

$$U_{ABm} = 2 \times 2 = 4 \text{ V}$$

$$R_9 \Rightarrow U_{ABm} = \bar{E}_g = 4 \text{ V.}$$



$$u_{AB}(t) = U_{ABm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB})$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{2 \cdot 10^{-3}} = 10^3 \pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{à } t=0 \quad u_{AB} = U_{ABm} \sin \varphi_{AB}$$

$$\sin \varphi_{AB} = \frac{u_{AB}}{U_{ABm}} = 1 \Rightarrow \varphi_{AB} = \frac{\pi}{2} \text{ rad}$$

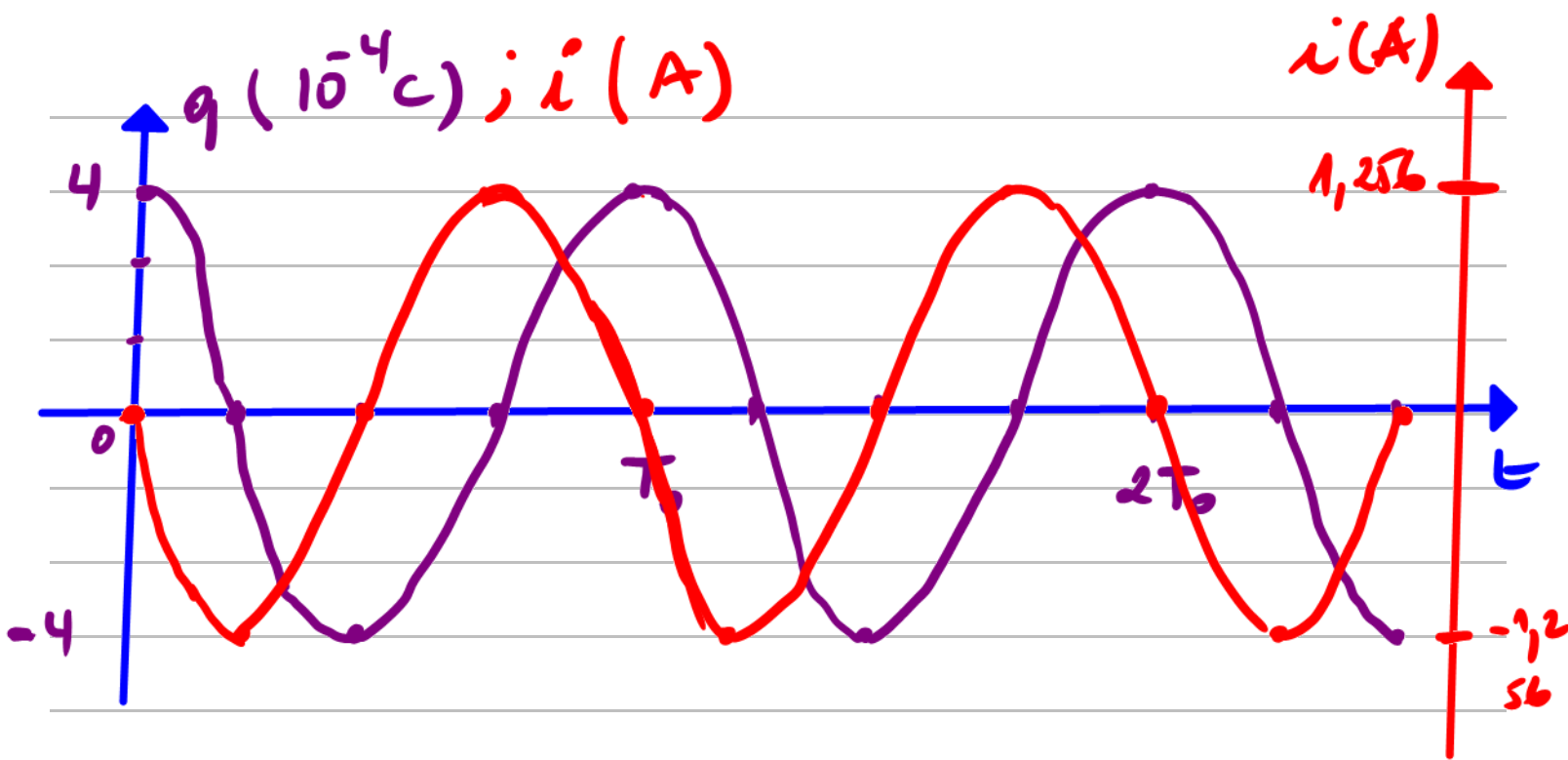
$$\text{d'où } u_{AB}(t) = 4 \sin(10^3 \pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$\text{2a. } q(t) = c \cdot u_{AB}(t)$$

$$q(t) = 4 \cdot 10^{-4} \sin(10^3 \pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = 4 \cdot 10^{-4} \times 10^3 \pi \cos(10^3 \pi t + \frac{\pi}{2})$$

$$i(t) = 1,256 \sin(10^3 \pi t + \pi)$$

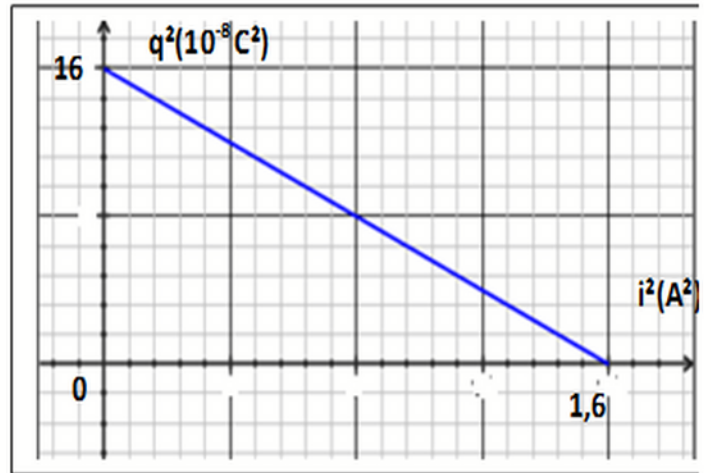


$$\varphi_i - \varphi_q = \pi - \frac{\pi}{2} = +\frac{\pi}{2} \text{ rad} \rightarrow$$

$i(t)$ est en quadrature \rightarrow avance
de phase $\pi/2$ \bar{a} $q(t)$.



- 3) On donne la courbe représentative de $q^2 = f(i^2)$. (figure ci-dessous)
- Montrer, en utilisant les expressions temporelles de $q(t)$ et de $i(t)$ la relation : $q^2 = A (I_m^2 - i^2)$ avec I_m : l'intensité maximale de $i(t)$ et A : une constante que l'on demande d'exprimer en fonction de L et C .
 - Vérifier que cette relation est en accord avec l'allure de la courbe $q^2 = f(i^2)$.
 - Retrouver les valeurs de :
 - La charge maximale Q_m .
 - L'intensité maximale I_m .
 - La pulsation propre ω_0 .
 - Déduire de la courbe précédente que l'énergie totale de l'oscillateur se conserve puis calculer sa valeur.



$$3a. q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_{AB}) \text{ avec } Q_m = CU_{AB}$$

$$i(t) = \underbrace{\omega_0 Q_m}_{I_m} \cos(\omega_0 t + \varphi_{AB})$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_{AB})$$

$$q^2 = Q_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{AB})$$

$$E_{em} = \frac{1}{2C} Q_m^2 = 16 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\text{or } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x.$$

$$q^2 = Q_m^2 [1 - \cos^2(\omega_0 t + \varphi_{AB})]$$

$$= Q_m^2 \left[1 - \frac{i^2}{I_m^2} \right]$$

$$= \frac{Q_m^2}{I_m^2} [I_m^2 - i^2]$$



$$q^2 = A [I_m^2 - i^2]$$

$$\text{avec } A = \frac{Q_m^2}{I_m^2} = \frac{Q_m^2}{\omega_0^2 Q_m^2} = LC$$

$$b. \quad q^2 = A I_m - A i^2$$

$$y = b + a x \text{ avec } \left. \begin{array}{l} b = A I_m \\ a = -A \end{array} \right\}$$

$q^2 = f(i^2)$ est de la forme $y = ax + b$
donc sa représentation est une droite
affine décroissante.

$$c + bi i = 0 \quad q^2 = Q_m^2 = 16 \cdot 10^{-8} \text{ C}^2$$

$$\Rightarrow Q_m = 4 \cdot 10^{-4} \text{ C}.$$

$$+ bi q = 0 \Rightarrow i^2 = I_m^2 = 1,6 \text{ A}^2$$

$$I_m = \sqrt{1,6} = 1,26 \text{ A}.$$

$$* -A = \frac{-16 \cdot 10^{-8} - 0}{0 - 1,6} = 10 \cdot 10^{-8} = 2 \text{ C}$$

$$= \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{-A} = 0,1 \cdot 10^8 \Rightarrow \omega_0 = 3,16 \cdot 10^3 \text{ rad}$$

$$\omega_0 = 10^3 \pi = 31410 \text{ rad/s}$$

$$d. \quad E_{em} = E_e + E_m = \frac{1}{2} C U_c^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

$$E_{em} = \frac{1}{2} C q^2 + \frac{1}{2} L i^2.$$

$$\frac{dE_{em}}{dt} = \frac{1}{2} C \left(2 \frac{dq}{dt} q \right) + \frac{1}{2} L \left(2 \frac{di}{dt} i \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE_{em}}{dt} &= \frac{q}{C} i + i \times L \frac{di}{dt} \\ &= i \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_{em} = \text{cte} \Rightarrow E_{em} \text{ se}$$

conserve.



$$q^2 = \frac{1}{\omega_0^2} (I_m^2 - i^2).$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{\omega_0^2} (I_m^2 - i^2) \right]$$

$$2q \frac{dq}{dt} = -2i \frac{di}{dt} \times \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\frac{q}{C} \frac{dq}{dt} + Li \frac{di}{dt} = \frac{dE_{em}}{dt} \quad \rightarrow LC$$

$$i \left(\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} \right) = \frac{dE_{em}}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow E_{em} = Cte$$

