

Proposée par Mr Fehri Bechir	Série Fonction Réciproque	Année Scolaire 2018/2019
--	--	------------------------------------

Exercice N°1 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

1/ Montre que f réalise une bijection de $[\frac{\pi}{2}, \pi[$ sur $[1, +\infty[$.

2/ Calculer $f^{-1}(\sqrt{2})$ et $f^{-1}(\frac{2\sqrt{3}}{3})$.

3/ Etudier la continuité et la dérivabilité de f^{-1} sur $[1, +\infty[$.

4/ calculer $(f^{-1})(x)$, pour $x \in]1, +\infty[$.

Exercice N°2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = 1 - \tan x$

1/ Dresser le tableau de variation de f .

2/ Montrer que f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

3/ Calculer $f^{-1}(0)$ et $f^{-1}(2)$.

4/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(f^{-1})(x) = \frac{1}{-x^2+2x-2}$, pour tout réel x

5/ Etudier la nature des branches infinies de la courbe de f^{-1} .

Exercice N°3 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sqrt{\cos x}$

1/ Etudier la dérivabilité de la fonction f en $\frac{\pi}{2}$ à gauche et interpréter.

2/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 1]$.

b) Montrer, en utilisant la première question, que la fonction f^{-1} est dérivable 0 à droite et préciser le nombre $(f^{-1})'_d(0)$.

c/ Préciser la demi-tangente à la courbe de f en son point d'abscisse 0 et en déduire que f^{-1} n'est pas dérivable à gauche en 1

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$ pour tout $x \in]0, 1[$

Exercice N°4 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par $f(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$

1/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (on précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1).

2/ Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle I que l'on précisera.

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 1[$ et que $(f^{-1})(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, pour tout x de $]0, 1[$.

Exercice N°5 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1 - \cos \pi x}$

1/ / Etudier les variations de f et tracer sa courbe dans un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

2/ a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution x_0 dans $]0, 1]$.

b) calculer $f\left(\frac{2}{3}\right)$ et en déduire la valeur de x_0 .

3/a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) la fonction f^{-1} est-elle dérivable en $\frac{1}{2}$ à droite ?

c) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\pi x \sqrt{2x-1}}$, pour tout $x \in \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

Exercice N°6 :

A) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$

1/ a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1

b- Dresser le tableau de variations de f .

c- Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2/a – la fonction f^{-1} est-elle dérivable à droite en 1 ?

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in I$.

B) On considère la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\cos x} & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1/a Montrer que g est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b- vérifier que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$g(x) = \frac{1}{1 - \sin x}.$$

2/ Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3/a- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right]$ et calculer $(g^{-1})'(x)$.

b- La fonction g^{-1} est-elle dérivable à droite en $\frac{1}{2}$?