

Exercice N°1:

I- Soit f la fonction définie $\square$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j})$; $(\|\vec{i}\| = 4\text{cm})$

1/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, interpréter graphiquement les résultats obtenus

2/ Dresser le tableau de variation de f

3/ Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C au point d'abscisse 0

4/ Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$

a) Etudier les variations de g

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\square$ une unique solution α et que : $0,4 < \alpha < 0,5$

5/ Construire T et C

II - 1/ Montrer que f réalise une bijection de $\square$ sur un intervalle J dont on précisera

2/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$ (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

3)a) Donner le tableau de variation de $f^{-1}(x)$

b) Donner une équation de la tangente T' à $C_{f^{-1}}$ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$

c) Construire T' et $C_{f^{-1}}$ dans le repère R

III-

1/ Vérifier que : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$; $\forall x \in \square$

2/ Donner une primitive F de f sur $\square$

3/ Montrer que $F(0) - F(-1) = \text{Log}\left(\frac{1+e}{2}\right)$

Exercice N°2:

I- Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \text{Log}x$

1 / Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation

2/ En déduire pour tout x de $]0, +\infty[$; $g(x) > 0$

II- Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x + 1 + \frac{\text{Log}x}{x}$

On désigne par ζ_f sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} ; \forall x \in]0, +\infty[$

b) Dresser tableau de variation de f

2/a) Montrer que la droite $D : y = x + 1$ est une asymptote à ζ_f

b) Etudier les positions de ζ_f par rapport à D

3/a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et que $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

4/ Tracer D , ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère (où f^{-1} est la fonction réciproque de f)

5/ Soit F une primitive de f sur $]0, +\infty[$

Montrer que $F(e) - F(1) = \frac{e^2 + 2e - 2}{2}$

Exercice N°3:

Soit f la fonction définie par $f(x) = x - \frac{1}{e^x - 1}$.

1) Dresser le tableau de variation de f .

2) a) Montrer que (C_f) admet deux asymptotes obliques d'équations respectives :

$$\Delta : y = x \text{ et } \Delta' : y = x + 1$$

b) Montrer que $\omega(0; 1/2)$ est un centre de symétrie de (C_f) .

3) Soit g la restriction de f sur $]0, +\infty[$

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$, admet une unique solution α et que :

$$\text{Log}2 < \alpha < 1$$

c) Montrer que $f'(\alpha) = 1 + \alpha + \alpha^2$

d) Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse α

e) Tracer T, Δ , Δ' et (C_f) dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ (on prend $\alpha = 0.8$)

II) On désigne par g^{-1} la fonction réciproque de g et (C') sa courbe représentative dans le repère R.

1) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(g^{-1})'(0)$ en fonction de α .

2) La courbe (C') coupe (xx') en un point I, écrire la tangente T' à (C') en I.

3) Tracer (C') et T' dans le même repère R.

Exercice N°4:

1) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 + (1-x)e^{-x}$

a) Calculer $g'(x)$. Etudier son signe.

b) Démontrer que la limite de g en $+\infty$ est égale à -1.

c) Dresser le tableau de variation de g.

d) En déduire que pour tout $x \geq 0$, on a : $g(x) \leq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = xe^{-x} - x + 4$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(unité: 2cm)

a) Vérifier que pour tout x de $[0, +\infty[$ on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f sur $[0, +\infty[$. Préciser la limite de f en $+\infty$.

3) a) Montrer que la droite Δ d'équation : $y = -x + 4$ est asymptote à (C_f) .

Etudier la position de (C_f) par rapport à Δ .

b) Soit D la droite d'équation : $y = -\frac{x}{2} + 4$

Calculer les coordonnées des points d'intersection de (C_f) et D.

c) Préciser la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

d) Construire la courbe (C_f) .

Exercice N°5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$

1/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f

2/a) Etudier les variations de la fonction $g(x) = f(x) - x$. (remarquer que : $e^{2x} - 2e^x + 1 = (e^x - 1)^2$)

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution a sur $\mathbb{R}$ et que $a \in]2; 3[$

3/a) Montrer que $\forall x \in]2; 3[$ on a : $|f'(x)| \leq 0,5$

b) En déduire que $\forall x \in [2; 3]$ on a : $|f(x) - a| \leq 0,5 |x - a|$

4/ Soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 2 \leq V_n \leq 3$

b) Montrer que : $|V_{n+1} - a| \leq 0,5 |V_n - a|$

c) Déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : |V_n - a| \leq (0,5)^n$ et calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

Exercice N°6

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$. On désigne par (Γ) la courbe de f dans le repère R .

1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel x ; $f(x) = -x + \ln(1 + e^x)$.

b) En déduire que la courbe (Γ) admet au voisinage de $(-\infty)$ une asymptote Δ dont on précisera une équation cartésienne.

- 3) a) Vérifier que pour tout réel x ; $f'(x) = \frac{-1}{1+e^x}$.
- b) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) On considère les points A, B et C de (Γ) d'abscisses respectives $x_A = 0$, $x_B = 1$ et $x_C = -1$ et soit T_0 la tangente à la courbe (Γ) au point A.
Montrer que la droite (BC) est parallèle à T_0 .
- 5) Tracer Δ , T_0 et (Γ) .

Exercice N°7

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (1-x)e^x + 1$

- 1) Etudier le sens de variation de g .
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution x_0 et que $x_0 \in [1.2, 1.3]$
- 3) Déterminer le signe de $g(x)$.

II) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x + 1} + 2$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite D d'équation : $y = x + 2$ est asymptote de (C) .

c) Etudier la position de (C) par rapport à D .

3) a) Montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

c) Tracer la courbe (C) ainsi que ses asymptotes.

Exercice N°8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$. On désigne par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $R = (O, \vec{u}, \vec{v})$. (Unité 2cm)

A)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats obtenus.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

2) Soit $h(x) = f(x) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de h .

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution $\alpha \in \mathbb{R}$ et vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

c) En déduire la position de (ζ_f) par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3) a) Montrer que le point $I(0, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (ζ_f) .

b) Déterminer une équation de la tangente T à (ζ_f) au point I .

B)

1) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur l'intervalle J .

c) Déterminer une équation de la tangente T' à $(\zeta_{f^{-1}})$ au point d'abscisse $1/2$.

2) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour x dans J .

3) Tracer dans le repère R les droites Δ , T et T' et les courbes (ζ_f) et $(\zeta_{f^{-1}})$.

Exercice N°9

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x + x(\ln x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4cm).

1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

- c) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que $f'(x) = (1 + \ln x)^2$.
- d) Dresser le tableau de variations de f .
- 2)a) Ecrire une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 1 .
- b) Etudier la position relative de (C) et T .
- c) Construire T et (C) .
- 3) Soit la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ définie par $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
- a) A l'aide d'une intégration par partie Calculer I_1 .
- b) Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a :
$$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$$
- 4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$, $x=e$ et $y=0$. Calculer A en cm^2 .

La confiance en soi est le premier secret du succès (Ralph Waldo Emerson)