

PROBLEMES DE REVISION

PROBLEME 1

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définies par intégrales.
- Suites intégrales.

A°/ Soit φ la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$.

1°- Etudier les variations de φ et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 2 cm.

2°- Montrer que φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle E que l'on déterminera. Tracer la courbe ξ' de φ^{-1} dans le même repère.

3°- Soit Δ la droite d'équation : $y = -x + 2$.

a) Montrer que Δ coupe ξ en un seul point A d'abscisse α et que $\alpha > 1$

b) Soit D la domaine du plan limité par ξ , ξ' et Δ . Calculer l'aire de D en fonction de α et vérifier que l'aire de D est égale à : $(2 - \alpha^2) 4 \text{ cm}^2$.

B°/ On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1 - x e^{-x}}$

et soit $I = \int_0^1 f(x) dx$.

1°/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $x e^{-x} \leq \frac{1}{e}$.

2°/ Dresser le tableau de variation de f .

3°/ Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

En déduire un encadrement de I .

C°/ soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx$.

1°/a) Calculer J_1 .

b) En utilisant deux intégrations par parties successives, montrer

que : $J_2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2}\right)$.

2°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = 1 + J_1 + J_2 + \dots + J_n$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$1 + x e^{-x} + \dots + x^n e^{-nx} = \frac{1 - (x e^{-x})^{n+1}}{1 - x e^{-x}}$$

b) En déduire que : $I - u_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) dx$.

c) Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$0 \leq x^{n+1} e^{-(n+1)x} f(x) \leq \frac{1}{e^n (e-1)}$$

d) En déduire un encadrement de $(I - u_n)$.

Etudier alors la convergence de la suite (u_n)

D°/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :
$$\begin{cases} g(t) = f(\text{Log } t) & \text{si } t > 0. \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

et F la fonction définie par : $F(x) = \int_1^x g(t) dt$.

1°/ Justifier l'existence de $F(x)$ sur $[0, +\infty[$.

2°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $F'(x)$.

3°/ a) Montrer que pour tout $t > 0$ on a : $\text{Log } t - t + 1 < 0$.

En déduire que $\frac{t}{t - \text{Log } t} \leq t$.

b) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$ on a : $\frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0$.

4°/ Montrer que pour tout $t \in [1, +\infty[$ on a :

$$1 + \frac{\text{Log } t}{t} \leq \frac{t}{t - \text{Log } t} \leq 1 + \text{Log } t$$

Encadrer alors $F(x)$ pour $x \geq 1$ et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

PROBLEME 2

Thèmes abordés :

- fonctions logarithmes .
- Courbes représentatives et calcul d'aire.

- Fonctions définies par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x (\log x)^n & \text{si } x > 0. \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

On pose ξ_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.

A°- 1°/a) Montrer que f_n est continue à droite en 0 .

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite en 0 .

c) Montrer que f_n est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'_n(x)$

2°/a) Dresser le tableau de variation de f_n suivant la parité de n .

(on distinguera les cas où $n = 1$ et $n \geq 3$)

b) Montrer que toutes les courbes ξ_n passent par trois points fixes : l'origine du repère et deux autres points A et B tels que x_A et x_B vérifiant : $0 < x_A < x_B$.

3°/a) Etudier la position relative de ξ_1 et ξ_2 puis construire ξ_1 et ξ_2 dans le même repère.

b) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1 et

ξ_2 et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = e$.

B°- On pose $F_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx$, avec $n > 0$ et $\alpha \in]0, 1[$.

1°/ a) Sans calculer $F_n(\alpha)$, prouver que $F_n(\alpha)$ admet une limite finie notée u_n lorsque α tend vers 0^+ .

b) Calculer $F_1(\alpha)$, en déduire que $u_1 = -\frac{1}{4}$.

2°/a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$ et pour tout $n > 0$ on a :

$$F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} (\log \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha).$$

b) En déduire que pour tout $n > 0$ on a : $u_{n+1} = -\frac{n+1}{2} u_n$.

3°/ Soit A_n , l'aire en cm^2 , de la partie du plan limitée par ξ_n , l'axe des abscisses et les droites : $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que : $A_n = 4 |u_n| \text{ cm}^2$.

b) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $A_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$.

c) Montrer que pour $n \geq 3$, on a : $A_{n+1} \geq 2 A_n$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$.

e^x

C°/ On pose $G(x) = \int_1^x t \log t \, dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1°/ a) Sans calculer $G(x)$; Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer le sens de variation de G .

2°/ a) Calculer $G(x)$ en fonction de x .

b) Dresser le tableau de variation de G .

PROBLEME 3

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles.
- Bijections
- Solutions de $g(x) = 0$ et signe de $g(x)$
- Nombres complexes et ensemble des points.

A°- Soit f la fonction définie par $f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{2}{e^x} - 1}$.

1°/ Déterminer le domaine de définition de f .

2°/ Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$.

a) Dresser le tableau de variation de g .

b) En déduire que la courbe de g coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α tel que : $\frac{\log 2}{2} < \alpha < 1$.

c) Etudier le signe de $g(x)$ sur $[0, +\infty[$.

3°/ Montrer que pour $x > 0$ on a :

$$\log[f(x)] = \frac{1}{x} [1 + x \log x] + \frac{1}{2} \log(1 - e^{-\frac{2}{x}}).$$

En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

4°/ a) Montrer que $f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$.

b) Exprimer $f'(x)$ en fonction de $g\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f .

d) Etudier la position relative de ξ_f et $\Delta: y = x$.

e) Tracer ξ_f , Δ et dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B°- 1°/ Montrer que la restriction h de f à $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ est une bijection de $]\frac{1}{\alpha}, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

2°/ a) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur J .

b) Tracer la courbe ξ' de h^{-1} dans le même repère.

3°/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\log 2}{2} \leq u_n \leq 4$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) . En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

C°/- Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit ψ l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe tel que

$$z \in \{z \in \mathbb{C} / |z| \neq 1\}, \text{ on associe le point } M' \text{ d'affixe } z' = \frac{\bar{z}}{\log|z|}.$$

1°/ Déterminer les coordonnées X et Y du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M .

2°/On pose E l'ensemble des points $M' = \psi(M)$ lorsque M décrit la droite d'équation $x = 1$ privée du point d'abscisse 1.

Montrer que E est la réunion de la courbe ξ_f et d'une autre courbe

ζ obtenue à partir de ξ_f par une transformation simple que l'on précisera.

PROBLEME 4 C

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles et Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit f_n la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$; $n \geq 0$.

On note ξ_n sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2cm.

A°-1°/a) Etudier les variations de f_1 et f_2 .

b) Etudier la position relative de ξ_1 et ξ_2 .

Construire ξ_1 et ξ_2 dans le même repère.

c) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par

ξ_1 , ξ_2 et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

2°/ Soit u_n la valeur minimale de f_n sur $[-1, +\infty[$.

a) Montrer que : $u_n = f_n(n-1)$.

b) Pour $x \geq 0$, comparer $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Log}(u_n)$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

B°/ Pour $x \in \left] \frac{1}{e}, +\infty \right[$, on pose $F(x) = \int_0^{\text{Log } x} f_2(t) dt$.

1° / Justifier l'existence de $F(x)$ pour $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$.

2° / Montrer que pour tout $x \in]\frac{1}{e}, +\infty[$ on a : $F(x) \leq x(1 - \frac{1}{\log x + 1})$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} F(x)$.

3° / a) Montrer que pour tout $x > \frac{1}{e}$ on a :

$$F(x) = \frac{x}{(\log x + 1)^2} - 1 + 2 \int_0^{\log x} f_3(t) dt$$

b) En déduire que pour tout $x \geq 1$ on a : $F(x) \geq \frac{x}{(\log x + 1)^2} - 1$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

4° / Montrer que la fonction F est une bijection de $] \frac{1}{e}, +\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

C° / Pour $n \geq 1$ on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

1° / Montrer que la suite (I_n) est décroissante et qu'elle est convergente.

2° / a) Montrer que pour tout $n > 2$ on a :

$$\frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

3° / a) Exprimer $f_n(x)$ à l'aide de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$.

b) En déduire une relation entre I_n et I_{n+1} et montrer

que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1} = 1$

PROBLEME 5 :

Thèmes abordés :

- Etude de fonctions.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°- Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère la fonction F

définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_{-x}^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$

1°/ a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$F'(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{1+x^2}.$$

- b) Calculer $F(0)$. En déduire que si f est impaire alors F est nulle.
- c) Montrer que si f est paire alors pour tout réel x on a :

$$F(x) = 2 \int_0^x \frac{f(t)}{1+t^2} dt$$

2°/ Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{3x^2+2x+3}{1+x^2}$.

a) Etudier g et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) En utilisant 1°/ montrer que : $\int_{-x}^x g(t) dt = 6x$.

c) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par ξ , l'axe des abscisses et Les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 1$.

B°- Soit G la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ par : $G(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$.

1°/ a) Montrer que G est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et calculer $G'(x)$.

b) Calculer $G(0)$ et déduire $G(\frac{\pi}{8})$.

2°/ On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ et pour tout $n \geq 1$:

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}. \text{ En d\'eduire } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

b) Montrer que : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $n \geq 1$.

c) Calculer alors : u_1, u_2 et u_3 .

3°/ Soit (v_n) la suite d\'efinie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{2k} x^{2k} = \frac{1 + (-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

b) En d\'eduire que : $v_n = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx$.

c) Exprimer alors v_n en fonction de u_{n+1} et u_0 et en d\'eduire que (v_n) est convergente et calculer sa limite.

PROBLEME 6 :

Thèmes abordés :

- fonctions Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions d\'efinie par int\'egrales.
- Suites int\'egrales.

A°- soit f la fonction d\'efinie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = -x \operatorname{Log} |x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1°/Etudier les variations de f et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Etudier la position relative de ξ et $D : y = x$.

2°/ Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x) dx$. Déduire l'aire du domaine du plan limité par

la courbe ξ , la droite D et l'axe des abscisses.

3°/ Pour tout réel x on pose : $G(x) = \int_1^{\cos x} f(t) dt$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $G'(x)$.

b) Déterminer l'expression de $G(x)$ pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

c) Déduire la valeur de $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} f(t) dt$.

B°- Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction h_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} h_n(x) = \frac{x^{2n+1} \operatorname{Log} x}{x^2 - 1} & \text{si } x \in]0,1[\\ h_n(0) = 0 \text{ et } h_n(1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

1°/ a) Montrer que h_n est continue sur $[0,1]$.

b) Soit g_n la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} g_n(x) = x^{2n+1} \operatorname{Log} x & \text{si } x \in]0,1[\\ g_n(0) = 0. \end{cases}$$

Montrer que : $h_{n+1}(x) - h_n(x) = g_n(x)$ pour tout $x \in [0,1]$

2°/ Soit $(u_n(x))$ la fonction définie sur $[0,1]$ par $u_n(x) = \int_x^1 g_n(t) dt$

On note $u_n(0) = \int_0^1 g_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow 0^+} u_n(x)$.

a) Calculer $u_n(x)$ pour $x \in]0,1[$.

b) Montrer que $u_n(0) = \frac{-1}{4(n+1)^2}$.

c) Calculer $G\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$; pour $k \in \mathbb{Z}$.

3°/ Soit $I_n = \int_0^1 h_n(x) dx$.

- a) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $I_{n+1} - I_n = u_n(0)$.
 b) Etudier les variations de la fonction φ définie sur $]0,1[$ par :

$$\varphi(x) = 2 \operatorname{Log} x + \frac{1}{x} - x.$$

- c) En déduire que si $0 < x < 1$ alors : $0 < \frac{x \operatorname{Log} x}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.
 d) Montrer alors que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $0 \leq h_n(x) \leq \frac{1}{2} x^{2n}$.
 e) Montrer que pour tout $n > 0$ on a : $I_0 = \frac{1}{4} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right) + I_n$.

En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ en fonction de I_0 .

PROBLEME 7

Thèmes abordés :

- Fonctions Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 1$. On considère la fonction f_n

définie sur $[1, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{1}{n!} \frac{(\operatorname{Log} x)^n}{x^2}$.

ξ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A°-1°/ Etudier les variations de f_1 et déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$

2°/ Tracer la courbe ξ_1 ainsi que la tangente à ξ_1 au point d'abscisse 1.

B°-1°/ Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2°/ a) Calculer $f_n'(x)$ et vérifier que $f_n'(e^{\frac{n}{2}}) = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de f_n .

c) Vérifier que la valeur maximale de f_n sur $[1, +\infty[$ est :

$$y_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{2e} \right)^n.$$

3°/ a) Soit $x \in [1, +\infty[$. Etudier le signe de $f_2(x) - f_1(x)$.

b) Préciser la position de ξ_1 et ξ_2 .

4°/ a) Soit $n \geq 1$. Calculer $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ pour $x > 1$.

b) Montrer que : $y_{n+1} = \frac{1}{2} f_n(e^{\frac{n+1}{2}})$ et que $y_{n+1} \leq \frac{1}{2} y_n$.

c) En déduire que : $y_{n+1} \leq \frac{1}{e \cdot 2^n}$ et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

C°-Pour tout $n \geq 1$ et $\forall x \in [1, +\infty[$, on pose : $F_n(x) = \int_1^x f_n(x) dx$.

1°/ a) Soit $k \geq 1$ un entier. En utilisant une intégration par parties,

montrer que : $F_{k+1}(x) = F_k(x) - \frac{(\text{Log } x)^{k+1}}{x(k+1)!}$.

b) En déduire que pour $\forall n \geq 2$ on a : $F_n(x) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(\text{Log } x)^k}{x k!}$

2°/ Soit $\alpha \geq 1$ un nombre réel fixé.

a) Montrer que : $0 \leq F_n(\alpha) \leq (\alpha - 1) y_n$.

b) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\alpha)$.

3°/ Pour $n \geq 1$ et $x \geq 1$ on pose : $V_n(x) = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(\text{Log } x)^k}{k!}$.

a) Exprimer $V_n(x)$ en fonction de $F_n(x)$.

b) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(\alpha)$; $\alpha \geq 1$ fixé.

c) En déduire la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de la suite

(U_n) définie par : $U_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$.

PROBLEME 8

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles et Logarithmes.
- Courbe représentative et calcul d'aire.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}} & \text{si } x > 0. \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On note ξ_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé

$(O, \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 4 cm.

A°-1°/ a) Montrer que f_n est continue sur $[0, +\infty[$.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0 .

c) Calculer $f_n'(x)$ pour $x > 0$ et justifier que f_n est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2°/a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

b) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(t) = e^{-t} - (1 - t)$.
Dresser le tableau de variation de g .

En déduire que pour tout $t \geq 0$ on a : $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

c) Soit $t \geq 0$; En intégrant par parties sur $[0, x]$, déduire que pour

$$\text{tout } x \text{ positif on a : } 0 \leq e^{-x} - (1 - x) \leq \frac{x^2}{2} .$$

3°/a) Démontrer que pour tout $x > 0$, on a :

$$0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x} .$$

En déduire que la droite $D_n : y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote à ξ_n .

b) Préciser la position relative de ξ_n et D_n .

Tracer ξ_n et D_n pour $n = 3$.

4°/Dresser le tableau de variation de f_n .

5°/a) Tracer ξ_1 et son asymptote D_1 , préciser la tangente en O

b) Montrer que pour $n > 0$ on a ξ_n est l'image de ξ_1 par une homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$.

c) Construire ξ_2 sur le même graphique que ξ_1 .

6°/ Pour tout $n > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$ on pose : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $f_n(x) \leq x$.

b) En déduire que pour tout $n > 0$ on a : $I_n \leq \frac{1}{2}$

c) Etablir que pour tout $n > 0$ on a : $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{2}{n}}$

d) Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$

B°-1°/ Démontrer que pour tout $n > 0$ l'équation : $x e^{-\frac{1}{nx}} = 1$ admet une seule solution notée : α_n telle que $\alpha_n > 0$.

2°/ Démontrer que α_n est une solution de l'équation : $x \log x = \frac{1}{n}$.

3°/ Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $h(x) = x \log x$.

a) Etudier les variations de h .

b) Prouver que : $1,76 < \alpha_n < 1,77$ pour $n \geq 1$.

c) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

d) En déduire qu'elle est convergente et vérifier que sa limite α est telle que $\alpha \geq 1$

e) Montrer que $h(\alpha) = 0$ et en déduire la valeur de α .

PROBLEME 9 :

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

A°/ 1°/ Justifier l'existence de $F(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2°/ Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3°/ a) Vérifier que pour tout $t \in [2, +\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1 - e^{4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt.$$

b) Prouver que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.

4°/ Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et que F possède une limite finie L en $+\infty$. (On ne demande pas de calculer cette limite)

B°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}} dt$.

1°/ Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq e^{-x}$
et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2°/ On pose, pour tout x

$\in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $g(t) = F(x \operatorname{tg} t)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que :

$$g'(x) = \frac{x}{\cos^2 t} e^{-x^2 \operatorname{tg}^2 t}.$$

b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $F(x) = x \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \operatorname{tg}^2 t}}{\cos^2 t} dt$.

3°/En admettant que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et que :

$$f'(x) = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt ;$$

Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $[f(x^2)]' = -2 e^{-x^2} F(x)$.

4°/ soit $h(x) = f(x^2) + [F(x)]^2$; pour tout $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que h est une constante et calculer cette constante.

b) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

c) Dresser le tableau de variation de F et donner l'allure de la courbe de F .

C°/ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$: $U_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t^2} dt$

$$\text{et } V_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} U_n(x).$$

1°/ Vérifier que $V_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2°/ a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $V_n = \frac{n-1}{2} V_{n-2}$.

b) En déduire que : $V_n \cdot V_{n+1} = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^{n+1}}$.

c) Déterminer alors les termes V_3 et V_4 de la suite (V_n) .

PROBLEME 10

Thèmes abordés :

- fonctions exponentielles . Famille des fonctions.
- Fonctions définie par intégrales.
- Suites intégrales.

A°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x (1 - \log x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par ξ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1°/ a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.
 b) Dresser le tableau de variation de f .
 c) Préciser la tangente T à ξ au point d'abscisse e , et construire ξ et T .

2°/ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = e , \\ u_n \cdot f(u_{n+1}) = f(u_n) . \end{cases}$$

- a) Montrer que la suite u est géométrique et calculer u_n en fonction de n .

- b) Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

3°/ Pour tout entier naturel k , on pose M_k et M_{k+1} les points de ξ d'abscisses u_k et u_{k+1} .

On note A_k l'aire du triangle $OM_k M_{k+1}$.

- a) Montrer que $A_k = 2 [u_k f(u_{k+1}) - u_{k+1} f(u_k)] \text{ cm}^2$. Puis calculer A_k en fonction de k

- b) Calculer $B_n = \sum_{k=0}^n A_k$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n$.

B°/ Soit p un entier naturel non nul et g_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} g_p(x) = x^p (1 - \text{Log}|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ g_p(0) = 0. \end{cases}$$

On désigne par ξ_p sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1°/a) Etudier la parité de g_p .
 b) dresser, suivant la parité de p , le tableau de variation de g_p .

2°/a) Montrer que toutes les courbes ξ_p passent par quatre points fixes.

- b) Construire dans le même repère les courbes ξ_1 et ξ_2 .

3°/ On note $I_p(x) = \int_1^x g_p(t) dt$; pour tout $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

- a) Calculer $I_p(x)$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} I_p(x)$, et interpréter graphiquement cette limite

notée I_p .

c) Calculer, en cm^2 , l'aire de la partie du plan limitée par ξ_1 et ξ_2 et les droites d'équation : $x = 0$ et $x = 1$.

C°/ Soit G la fonction définie sur $]-\infty, 0]$ par $G(x) = \int_{e^x}^1 \frac{g_1(t)}{1+t^2} dt$.

1°/ a) Montrer que G est dérivable sur $]-\infty, 0]$ et que :

$$G'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{1+e^{2x}}.$$

b) En déduire le sens de variation de G sur $]-\infty, 0]$

2°/ a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$ on a :

$$\frac{1}{2} I_1(x) \leq G(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} I_1(e^x).$$

c) On admet que la limite de $G(x)$ en $-\infty$ existe et finie et est notée ℓ .

d) Montrer qu'on a alors $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$.

PROBLEME 11

Le but de ce problème d'étudier la convergence de la suite

$$U_n(\alpha, \theta) = \sum_{k=1}^n \frac{\cos^k \theta}{k^\alpha}; \text{ Pour } 0 \leq \alpha \text{ et } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

Partie I :

Soit $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$

1) étudier f_α

2) tracer la courbe représentative C_α de f_α

Partie II

Dans cette partie on suppose que $\theta = 0$

A°/ Montrer que $U_n(0,0)$ est divergente

B°/ On suppose que $\alpha = 1$.

- 1) Montrer que $\frac{1}{k+1} \leq \int_x^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{k}$
- 2) En déduire que $U_n(1, 0)$ divergente

C°/ Supposons que $0 < \alpha < 1$

- 1) Montrer que $U_n(1, 0) \leq U_n(\alpha, 0)$
- 2) Montrer que $U_n(\alpha, 0)$ est divergente

D°/ Supposons que $\alpha > 1$

- 1) Montrer que $U_n(\alpha, 0) - 1 \leq \frac{1}{1-\alpha} \left[\frac{1}{n\alpha-1} - 1 \right]$
- 2) Montrer que $U_n(\alpha, 0)$ convergente et que sa limite ℓ vérifie :

$$0 \leq \ell \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

Partie III

Dans cette partie on suppose que $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

A°/ si $\theta = \frac{\pi}{2}$, montrer que $U_n(\alpha, \theta)$ convergente

B°/ 1) supposons que $\theta \neq \frac{\pi}{2}$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \cos^k \theta$

$$\text{Montrer que } |S_n| \leq \frac{\cos \theta}{\sin \frac{\theta}{2}}$$

$$2) \text{ Montrer que } U_n(\alpha, \theta) = \sum_{k=2}^n \frac{(S_n - S_{n-1})}{k^\alpha} + \cos \theta$$

$$3) \text{ En déduire que } U_n(\alpha, \theta) = \sum_{k=2}^{n-1} S_n \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \right) + \frac{S_n}{n^\alpha} + \frac{\cos \theta}{2}$$

$$4) \text{ Montrer que } |U_n(\alpha, \theta)| \leq \frac{\cos \theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \left[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \sin(2\theta) \right]$$

- 5) En déduire après l'étude de monotonie de $U_n(\alpha, \theta)$ que cette suite converge

Partie VI (facultatif)

1) Montrer que $g_n :]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\theta \mapsto U_n(\alpha, \theta)$$

est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et montrer que $g'_n(\theta) = \tan \theta \cdot U_n(\alpha-1, \theta)$

2) en déduire que $g'_n(\theta)$ converge pour $\alpha \geq 1$ et calculer sa limite pour $\alpha = 1$

3) pour quelle valeur de α la suite $(g_n^{(p)}(\theta))$ est convergente si $p \geq 1$.

Finalement on peut amuser avec la suite $V_n(\beta, \theta) = \sum_{k=1}^n \sin \theta$

PROBLEME 12

Le but de ce problème est de calculer la limite L de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2 + k^2}, \text{ puis la limite de la suite } n \mapsto n(S_n - L)$$

1°/ Soit f la fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$. Montrez que pour tout naturel $n \geq 1$

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$$

2°/ Soit φ une fonction continue et croissante sur $[0, 1]$.

a) Prouvez que pour tous les naturels k et n tels que $1 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \varphi(x) dx$$

b) Prouvez que pour tous les naturels k et n tels que $1 \leq k \leq n$:

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \varphi(x) dx \leq \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) Déduisez du 2.a) un encadrement de $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$, puis

$$\text{prouvez que : } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_d^1 \varphi(x) \, dx$$

Montrez que ce dernier résultat est encore valable si φ est décroissante sur $[0, 1]$ au lieu d'être croissante en considérant la fonction $(-\varphi)$.

1) Prouvez que $(S_n)_{n \geq 1}$ est convergente et explicitez sa limite L .

$$2) \text{ Démontrez que : } S_n - \int_0^1 f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) dx$$

c) En appliquant l'inégalité des accroissements finis, prouvez

$$\text{que : } \left(\frac{k}{n} - x\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \leq \left(\frac{k}{n} - x\right) f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

où k et n sont des naturels tels que $1 \leq k \leq n$ et x un réel

de $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.

c) Prouvez, grâce aux résultats des deux précédentes questions,

$$\text{que : } \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k}{n}\right) \leq S_n - \int_0^1 f(x) \, dx \leq \frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n f'\left(\frac{k-1}{n}\right)$$

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} [n(S_n - L)]$.

PROBLEME 13

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction définie $] -\infty, 1[$ par :

$$f_n(x) = x^n \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-x} \right) \text{ et } f_0(x) = \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-x} \right). \text{ On désigne par } (C_n) \text{ sa}$$

courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

A° / 1° / on pose, pour tout x de $] -\infty, 1[$; $h_n(x) = \frac{x}{x-1} - n \operatorname{Log}(1-x)$.

a) Etudier le sens de variations de h_n .

b) Calculer $h_n(0)$ et en déduire le signe de $h_n(x)$.

2°/a) Dresser, suivant la parité de n , le tableau de variation de f_n .

b) Tracer dans le même repère R, les courbes (C_1) et (C_2) , en précisant la position relative de deux courbes.

3°/ On pose pour tout x de $]-\infty, 1[$, $F_n(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a :

$$F_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{n+1} \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt.$$

b- Vérifier que pour tout t de $]-\infty, 1[$ on a :

$$\frac{t^{n+1}}{t-1} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \dots + t^n - \frac{1}{1-t}$$

c- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et pour tout x de $]-\infty, 1[$ on a :

$$(n+1) F_n(x) = x^{n+2} \operatorname{Log} \left(\frac{1}{1-x} \right) + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \operatorname{Log}(1-x)$$

4°/ a- Calculer $F_2(\frac{1}{2})$ et $F_1(\frac{1}{2})$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par les courbes (C_1) et (C_2) et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

B°/ 1°/ Pour tout $x \in [0, 1[$, on pose, $F_0(x) = \int_0^x f_0(t) dt$

- a) En remarquant que pour tout x de $]-\infty, 1[$ on a : $f_0(x) = -\operatorname{Log}(1-x)$
Etudier les variations de f_0 et Tracer C_0
- b) Montrer que pour tout x de $[0, 1[$ on a : $F_0(x) = (1-x) \operatorname{Log}(1-x) + x$.
- c) Donner une interprétation géométrique du réel $F_0(\alpha)$ pour $\alpha \in [0, 1[$.

2°/ Soit f une fonction deux fois dérivables sur $[a, b]$; ($a < b$) et vérifiant pour tout t de $[a, b]$; $f''(t) < 0$.

Pour tout x de $[a, b]$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \frac{1}{2}(x-a)[f(a) + f(x)]$

- a- Calculer $F'(x)$ et $F''(x)$ pour $x \in [a, b]$.
- b- Etudier le sens de variation de F' sur $[a, b]$.
- c- En déduire le signe de $F'(x)$.
- d- Montrer alors que $\int_a^b f(t) dt < \frac{1}{2}(b-a)[f(a) + f(b)]$.

C°/ Dans cette partie on se propose d'étudier la suite (v_n) définie par :

$$V_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad ; \quad \text{pour tout } n \geq 2.$$

1°/ a- Vérifier que pour tout $n \geq 2$ on a : $v_n = \sqrt[n]{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}$

b- En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $\text{Log}(v_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f_0\left(\frac{k}{n}\right)$

2°/a- Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout entier k vérifiant

$$0 \leq k \leq n-2 \text{ on a :}$$

$$\frac{1}{n} f_0\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f_0(t) dt \leq \frac{1}{2n} \left[f_0\left(\frac{k}{n}\right) + f_0\left(\frac{k+1}{n}\right) \right]$$

(on pourra utiliser les résultats de la partie **B/2**)

b- En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a :

$$\text{Log}(v_n) + \frac{1}{n} \text{Log}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_0^{1-\frac{1}{n}} f_0(t) dt \leq \text{Log}(v_n) + \frac{1}{2n} \text{Log}\left(\frac{1}{n}\right)$$

3) a- Montrer que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$\frac{1}{2n} \text{Log}\left(\frac{1}{n}\right) + 1 - \frac{1}{n} \leq \text{Log}(v_n) \leq 1 - \frac{1}{n}$$

b- Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite lorsque n tend vers $+\infty$

PROBLEME 14

A°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$; $F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

Le but de cet problème est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1) Déterminer

a) le signe de $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) le signe de $F\left(\frac{\pi}{2}\right)$

- 2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*_+$ on a : $\left| \frac{\cos(t)}{t} \right| \leq \frac{1}{t}$

Et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$; $|F(x)| \leq \text{Log } 3$.

- 3) Démontrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*_+$:

$$\text{Log } 3 - F(x) = 2 \int_x^{3x} \frac{\sin^2 \frac{t}{2}}{t} dt \text{ et que : } 0 \leq \text{Log } 3 - f(x) \leq 2x^2$$

En déduire que F admet une limite à droite au point O.

- 4) Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par : $m(x) = \frac{\text{Log } 3 - f(x)}{x}$

Etudier la limite de m à droite au point O.

B°/ Soit G la fonction réelle telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$:

$$\begin{cases} G(x) = F(x) \\ G(0) = \text{Log } 3 \end{cases}$$

- 1) Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- 2) En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que pour tout

$$x \in \mathbb{R}^*_+ \text{ on a : } \left| G(x) - \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{3x} \right| \leq \frac{2}{3x}$$

En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$; $|G(x)| \leq \frac{2}{x}$ et étudier la

limite de G en $+\infty$

- 3) Démontrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}^*_+$ on a :

$$G'(x) = \frac{-4 \cos x \cdot \sin^2 x}{x}$$

- 4) Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extremum.

Déterminer les intervalles sur lesquelles G est :

- a- croissante ;
- b- décroissante

- 5) On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0, 2\pi]$.
 Donner le tableau de variations de G_1 sans préciser les
 valeurs des extremums et en déduire que, sur $] \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} [$,
 G_1 admet une solution.

PROBLEME 15

Soient x un réel strictement supérieur à ε ($\varepsilon > 0$), $n \in \mathbb{N}^*$ et f une
 fonction numérique de la variable réelle définie et deux fois dérivable
 sur l'intervalle $[0, 1]$.

Soit $(U_n)_{n \geq 1}$ la suite réelle donnée par :

$$\forall n \geq 1, \quad U_n = \sum_{p=1}^n f\left(\frac{p}{n^a}\right) = f\left(\frac{1}{n^a}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n^a}\right)$$

- 1) Vérifier que la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.
- 2) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$ il
 existe $C_{(n,p)} \in]0, 1[$ tel que :

$$f\left(\frac{p}{n^a}\right) = f(0) + \frac{p}{n^a} f'(0) + \frac{p^2}{2n^{2a}} f''(C_{(n,p)})$$

b- En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$U_n - n f(0) - \frac{n(n+1)}{2n^a} f'(0) = \frac{1}{2n^{2a}} \sum_{p=1}^n p^2 f''(C_{(n,p)})$$

- 3) a- Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{p=1}^n p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- b- En posant $M = \sup |f''(x)|$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x \in [0, 1]$.

$$\text{On a : } \left| U_n - n f(0) - \frac{n(n+1)}{2n^a} f'(0) \right| \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^{2a}} M$$

c- Déduire que la suite $(v_n)_{n \geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = U_n - n f(0) - \frac{n(n+1)}{2n^a} f'(0) \quad ; \quad \text{converge vers } 0$$

- 4) On suppose que $f(0) = f'(0) = 0$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

PROBLEME 16

Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{1 + \text{Log } x}{x}$

On désigne par ζ_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A°/ On suppose dans cette partie que $n = 0$ et on pose :

$$F(x) = \int_1^x f_0(t) dt \quad \text{pour tout } x > 0.$$

- 1) a- Montrer que $\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) = x \text{Log } x$
 b- Montrer que F réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
- 2) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $F(x) = k$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α_k . Calculer α_0
- 3) * Montrer que la suite $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.

* Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$: $\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f_0(t) dt = 1$

* En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe

$$\beta_k \text{ Tel que } f_0(\beta_k) = \frac{1}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}.$$

$$\text{En déduire que } \lim_{k \rightarrow +\infty} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) = 0.$$

PROBLEME 17

A°/ 1) Soit φ la fonction définie sur $]0, +\infty[$ pour $\varphi(t) = e^t + t \text{Log } t - 1$.

Calculer $\varphi'(t)$ et montrer que l'équation $\varphi'(t) = 0$ admet dans $]0, 1[$ une solution unique α .

Etudier les variations de φ . déduire qu'il existe un réel unique $\beta \in]0, 1[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$. Préciser le signe de $\varphi(t)$ sur $]0, +\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(t) = (1 - e^{-t}) \text{Log } t & \text{si } t > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

a- Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.

- b- Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter le résultat .
- c- Montrer que $\forall t > 0 : f'(t) = \frac{e^{-t}}{t} \varphi(t)$.
- d- Etudier les variations de f et tracer sa courbe ζ dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (on prendra $\beta = 0.3$).

B° / On définit sur $I = [0, 1]$ les fonctions :

$$g_0(t) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* ; g_n(t) = 1 - t + \frac{t^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{t^n}{n!}.$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g'_n(t) = -g_{n-1}(t)$.
- 2) Montrer que $\forall t \in I$ on a : $g_1(t) \leq e^{-t} \leq g_0(t)$.
- 3) Soit un réel de l'intervalle $]0, 1[$; on pose pour $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n(t) = \int_t^1 t^n \text{Log } t \, dt$$

Calculer $I_n(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} I_n(t)$.

- 4) a- Prouver que pour tout $t \in]0, 1[$:

$$(1 - g_{2n+1}(t)) \text{Log } t \leq f(t) \leq (1 - g_{2n}(t)) \text{Log } t$$

$$\text{b- Dédire que : } - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k t^k \text{Log } t}{k!} \leq f(t) \leq - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k t^k \text{Log } t}{k!}$$

$$\text{c- Montrer alors que : } - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(t) \leq \int_t^1 f(t) dt \leq - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(t)$$

- 5) Pour $x \in [0, 1]$; on pose $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$

a- Montrer que F est continue sur $[0, 1]$.

$$\text{b- Dédire que : } \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2 k!} \leq F(0) \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2 k!}$$

- 6) On prend $n = 2$; donner un encadrement de l'aire de la partie du plan limitée par la courbe ζ , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

PROBLEME 18 :

A°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = (x + \frac{3}{2}) e^{-x} - \frac{1}{2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On désigne par ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ unité graphique 2 cm.

- 1) a- Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- b- Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $]0, +\infty[$ et calculer pour chaque cas $f'(x)$.

- 2) a- Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R}_+$ on a : $1-t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t+t^2$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \text{ on a : } x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2}$$

- b- Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

- 3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\varphi(x) = \frac{x}{1+x} - \text{Log}(1+x)$.

- a- Etudier les variations de φ . En déduire le signe de $\varphi(x)$.
- b- Dresser le tableau de variation de f.

Construire ζ et la tangente à ζ en $A(0, 1)$.

- 4) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$.

- a- Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\forall x \in \mathbb{R}_+$:

$$F(x) = f(x+1) - f(x).$$

- b- En déduire le sens de variation de F.
- c- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$ il existe $c \in [x, x+1]$ tel que $F(x) = f(c)$
En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

B°/ Dans cette partie g désigne la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on note : $a_n = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x) dx$;

$$b_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 g(x) dx \text{ et } I = \int_0^1 g(x) dx$$

1° / Déterminer que $\forall t \in [0, 1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots + (-1)^{n-2} t^{n-2} + \frac{(-1)^{n-2}}{1+t}$$

avec $P_{n-1}(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$

2° / a) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$; $\log 2 \leq 1$; en déduire que

$$\frac{\log 2}{n} \leq a_n \leq \frac{1}{n}$$

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty}$. En déduire que (b_n) converge vers le réel I .

3° / a- Montrer que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^x t^{n-1} dt$

et que :

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \frac{1}{n}$$

b- En déduire que $\forall x \in [0, 1]$ on a : $\left| g(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{nx}$

4° / On pose $D_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)^2}$

avec $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$;

$$b_n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\log n}{n} \leq S_n(1) \leq b_n + S_n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\log n}{n}$$

b) Vérifier que $\forall x \in [0, 1]$ et $\forall p \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{x^p}{p^2} \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$.

En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ et $x \in [0, 1]$ on a : $0 \leq S_n(x) \leq x$
(on distinguera deux cas n paire et n impaire).

c) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right)$. Déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(1) = I$

PROBLEME 19

A°- Soit g la fonction définie sur $]0,1[$ par $g(x) = \sqrt{\log \frac{1}{x}}$.

1°/ a) Montrer que g est dérivable sur $]0,1[$.

g est-elle dérivable à gauche en 1 ?

b) Dresser le tableau de variation de g et tracer sa courbe ξ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

2°/ a) Montrer que g réalise une bijection de $]0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit h la fonction réciproque de g . Expliciter $h(x)$ pour tout $x \in J$

c) Tracer la courbe de h dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

B°- On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.

2°/ Etudier le sens de variation de F et montrer que F est impaire.

3°/ a) Vérifier que pour tout $t \in [2, +\infty[$ on a : $e^{-t^2} \leq e^{-2t}$.

En déduire que pour tout $x \geq 2$ on a :

$$F(x) \leq \frac{1 - e^{-4-2x}}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt.$$

b) Prouver que pour tout $x \geq 2$ on a : $F(x) \leq \frac{1}{2e^4} + \int_0^2 e^{-t^2} dt$.

4°/ Montrer que F est majorée sur $\mathbb{R}$ et que F possède une limite finie ℓ en $+\infty$.

(On ne demande pas de calculer cette limite)

C°- 1°/ Soit G la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$G(x) = F(x \sqrt{n}) ; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, +\infty[$ et calculer $G'(x)$ pour $x \in [0, +\infty[$.

b) En déduire que $\int_0^1 e^{-nx^2} dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt$

2°/a) Montrer que pour tout réel t on a :

$$e^t \geq 1+t \text{ et que pour tout } t \geq 0 \text{ on a : } e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}.$$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \geq \sqrt{n} \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

$$\text{et que : } \int_0^1 e^{-nx^2} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

D°- On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ et $v_n = (n+1)u_n u_{n+1}$.

1°/ a) Calculer u_1 et u_2 .

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$.

En déduire que la suite (v_n) est constante.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

2°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \text{ et calculer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

3°/ a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sqrt{n} u_n = \sqrt{\frac{u_n}{u_{n-1}}} \cdot v_{n-1}$.

b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} u_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

4°/ Montrer que $u_{2n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ et que

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x dx.$$

5°/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sqrt{n} u_{2n+1} \leq G(1) \leq \sqrt{n} u_{2n-2}.$$

6°/ Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G(1) = \ell = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

CORRECTION

PROBLEME 1

A/ $\varphi(x) = 1 - e^{-x}$ pour $x \in [0, +\infty[$.

1°/ La fonction φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\varphi'(x) = e^{-x} > 0$
pour $x \geq 0$ donc φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{e^x}) = 1 \quad \varphi(0) = 0$$

Tableau de variation de φ :

x	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+	
$\varphi(x)$		

la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à la courbe de φ en $+\infty$

on remarque que : $\varphi(x) - x < 0$ donc ξ est au-dessous de la droite d'équation $y = x$.

2°/ la fonction φ est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc φ est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $\varphi([0, +\infty[) = [0, 1[$.

La courbe ξ' de la fonction réciproque φ^{-1} est la symétrique de ξ par rapport la droite d'équation $y = x$.

3°/ $\Delta : y = -x + 2$

a) soit $h(x) = \varphi(x) - (-x + 2) = \varphi(x) + x - 2$

on a : $h'(x) = \varphi'(x) + 1 = e^{-x} + 1 > 0$ car $e^{-x} > 0$ et on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\varphi(x) + x - 2) = +\infty$$

soit le tableau de variation de h :

x	0	α	$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	-2	0	$+\infty$

Ainsi on a : h est continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$
donc elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-2, +\infty[$.

Or $0 \in [-2, +\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent α par h , donc
il existe un seul réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Cela signifie que
l'équation $\varphi(x) = -x + 2$ possède une seule solution α ou bien que la
droite $\Delta : y = -x + 2$ coupe ξ en un seul point d'abscisse $\alpha > 0$.

Vérifions que $\alpha > 1$:

On a : $\alpha = h^{-1}(0)$ car $h(\alpha) = 0$ et h est une bijection de $[0, +\infty[$
sur $[-2, +\infty[$.

$$h(1) = 1 - e^{-1} + 1 - 2 = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \text{ donc } h(1) < 0$$

donc $h^{-1}(h(1)) < h^{-1}(0)$ car h^{-1} est croissante puisque h est
croissante, donc, et comme

$$h^{-1} \circ h = \text{Id}_{\mathbb{R}}, \text{ on a : } 1 < \alpha.$$

B^0/D est la partie du plan limitée par ξ , ξ' et Δ .

On pose D_1 la partie du plan limitée par ξ , l'axe des abscisses et les
droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$, et soit $D_2 = S_{\Delta'}(D_1)$ où $\Delta' : y = x$

$$\text{donc } A(D_1) = [2 - 2A(D_1) - 2f(\alpha) \left(\frac{2-\alpha}{2}\right)] \times 4 \text{ cm}^2$$

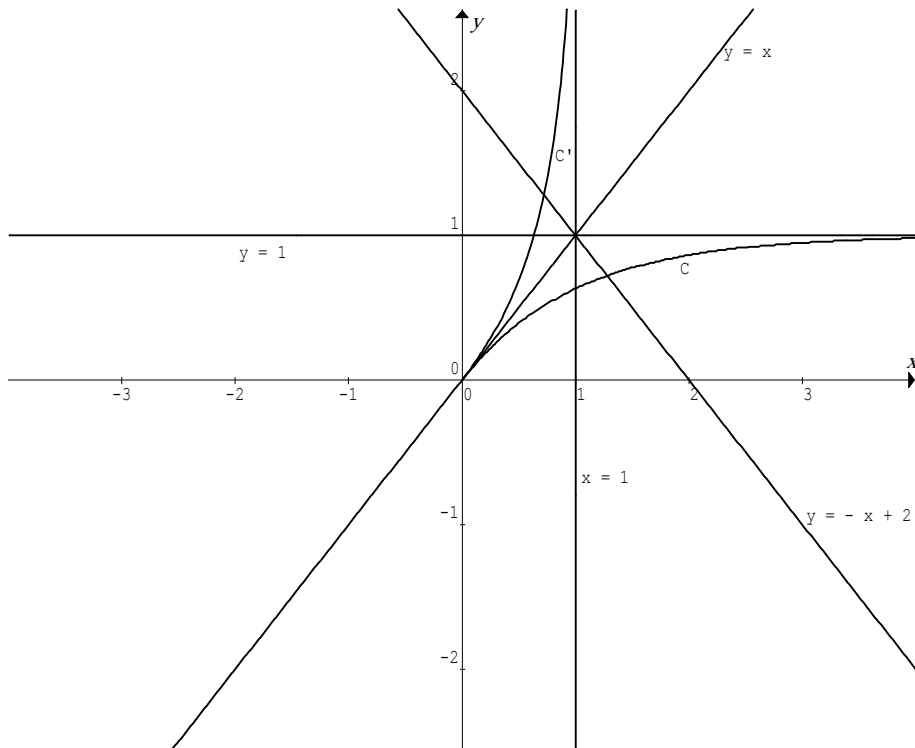
$$\text{c'est à dire } A(D_1) = (2 - 2A(D_1) - (2-\alpha)^2) \times 4 \text{ cm}^2.$$

$$\text{on a : } A(D_1) \int_0^\alpha (1 - e^{-x}) dx = (\alpha + e^{-\alpha} - 1) \times 4 \text{ cm}^2.$$

$$\text{donc } A(D) = [2 - 2\alpha - 2e^{-\alpha} + 2 - (2-\alpha)^2] \times 4 \text{ cm}, \text{ et on a : } e^{-\alpha} = \alpha - 1$$

$$\text{car } h(\alpha) = 0 \text{ donc } A(D_1) = [2 - 2\alpha - 2(\alpha - 1) + 2 - \alpha^2 + 4\alpha] \times 4 \text{ cm}^2$$

$$\text{donc } A(D) = (2 - \alpha^2) \times 4 \text{ cm}^2.$$



$$B^{\circ}/f(x) = \frac{1}{1-xe^{-x}} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } I = \int_0^1 f(x) dx.$$

1°/ Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$

Soit $g(x) = xe^{-x} - \frac{1}{e}$; on a g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^{-x}(1-x)$;

on a $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

soit le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$			

g admet un maximum absolu en 0 égale à $-\frac{1}{e} < 0$ donc pour tout

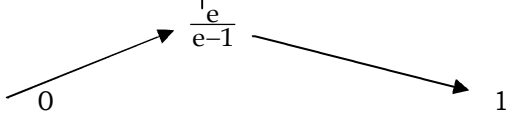
$x \in \mathbb{R}$; on a : $g(x) < 0$. Donc $xe^{-x} - \frac{1}{e} \leq 0$ d'où $xe^{-x} \leq \frac{1}{e}$.

2°/ la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = \frac{e^{-x}(1-x)}{(1-xe^{-x})^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-xe^{-x}} = 1 \text{ et :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-xe^{-x}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-xe^{-x}) = +\infty$$

soit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$			

$$f(1) = \frac{1}{1-e^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{e}{e-1}.$$

3°/ D'après la tableau de variation de f on a :

f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ donc :

$$f(x) \geq 1 ; \text{ pour } x \geq 1.$$

Comme $f(0) = 1$ on a : $f(x) \geq 1$ pour $x \geq 0$.

On a de plus f admet un maximum absolu en 1 égale à $f(1)$.

Donc $f(x) \leq \frac{e}{e-1}$; pour $x \in \mathbb{R}$ et donc pour $x \geq 0$.

Conclusion : pour $x \geq 0$ on a : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

On a : $1 \leq f(x) \leq \frac{e}{e-1}$.

$$\text{Donc } \int_0^1 1 dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{e}{e-1} dx. \text{ D'où : } 1 \leq I \leq \frac{e}{e-1}$$

$$C^\circ / n \in \mathbb{N}^* \text{ et } J_n = \int_0^1 x^n e^{-nx} dx.$$

$$1^\circ) a) J_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx.$$

On intègre par parties:

$$u(x) = x \rightarrow u'(x) = 1 \quad \text{et} \quad v'(x) = e^{-x} \rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$\text{d'où} \quad J_1 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \left[-e^{-x} \right]_0^1$$

$$\text{donc} \quad J_1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1 \quad \text{soit encore :} \quad J_1 = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}.$$

$$\text{b) } J_2 = \int_0^1 x^2 e^{-2x} dx ;$$

on intègre par parties, on pose :

$$u(x) = x^2 \rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^{-2x} \rightarrow v(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\text{d'où} \quad J_2 = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^1 + \int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} + \int_0^1 x e^{-2x} dx.$$

Pour l'intégrale $\int_0^1 x e^{-2x} dx$ on intègre par parties, on pose :

$$\text{on pose} \quad M(x) = x \rightarrow M'(x) = 1 \quad \text{et} \quad m'(x) = e^{-2x} \rightarrow m(x) = -\frac{1}{2} e^{-2x}$$

$$\text{donc} \quad \int_0^1 x e^{-2x} dx = \left[-\frac{1}{2} x^2 e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-2x} dx$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} \right]_0^1$$

$$\text{donc} \quad \int_0^1 x e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{donc} \quad J_2 = -\frac{1}{2} e^{-2} - \frac{3}{4} e^{-2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{on a alors} \quad J_2 = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} e^{-2} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{5}{e^2} \right).$$

2°/ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = 1 + J_1 + J_2 + J_3 + \dots + J_n$.

$$\text{a) Pour } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } 1 + x e^{-x} + x^2 e^{-x^2} + \dots + x^n e^{-nx} = \sum_{k=0}^n (x e^{-x})^k :$$

Somme de $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $q = x e^{-x}$

$$\text{et de premier terme } 1. \text{ Donc } \sum_{k=0}^n (x e^{-x})^k = \frac{1 - (x e^{-x})^{n+1}}{1 - x e^{-x}}.$$

b) On intègre les deux membres de l'égalité précédente entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 (1 + x e^{-x} + x^2 e^{-x^2} + \dots + x^n e^{-nx}) dx = \int_0^1 \frac{1 - x^{n+1} e^{-(n+1)}}{1 - x e^{-x}} dx \quad ; \text{d'où} :$$

$$\int_0^1 1 dx + \int_0^1 x e^{-x} dx + \dots + \int_0^1 x^n e^{-nx} dx = \int_0^1 \frac{1}{1 - x e^{-x}} (1 - x^{n+1} e^{-(n+1)}) dx$$

$$\text{donc } u_n = \int_0^1 f(x) (1 - x^{n+1} e^{-(n+1)}) dx = \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) x^{n+1} e^{-(n+1)} dx$$

$$\text{donc } u_n = I - \int_0^1 f(x) x^{n+1} e^{-(n+1)} dx$$

$$\text{d'où } I - u_n = \int_0^1 f(x) x^{n+1} e^{-(n+1)} dx .$$

c) D'après B°/-1°/ on a pour tout réel x :

$$x e^{-x} \leq \frac{1}{e} \quad \text{donc pour tout } x \geq 0 \text{ on a :}$$

$$0 \leq (x e^{-x})^{n+1} \leq \frac{1}{e^{n+1}} \quad \text{et on a d'après B°/-3°/ : } 0 \leq 1 - x^{n+1} e^{-(n+1)} \leq \frac{e}{e-1}$$

$$\text{d'où pour tout } x \geq 0 \text{ on a : } 0 \leq f(x) x^{n+1} e^{-(n+1)x} \leq \frac{1}{e^n (e-1)} .$$

$$\text{d) On a donc : } 0 \leq \int_0^1 f(x) x^{n+1} e^{-(n+1)x} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{e^n (e-1)} dx$$

$$\text{donc : } 0 \leq I - u_n \leq \frac{1}{e^n (e-1)} . \text{ On a alors } I - \frac{1}{e^n (e-1)} \leq u_n \leq I$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^n (e-1)} = 0 ; \text{ car } \left[\frac{1}{e^n (e-1)} \right] \text{ est une suite géométrique de raison}$$

$$q = \frac{1}{e} \in]0,1[.$$

Conclusion : la suite (u_n) est convergente et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = I$.

$$\text{D°/ Pour } t \geq 0 , \text{ on pose : } \begin{cases} g(t) = f(\text{Log } t) & \text{si } t > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

$$\text{et } F(x) = \int_1^x g(t) dt .$$

1°/ La fonction g est la composée de $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \text{Log } t$.

f est continue sur $]0, +\infty[$ et $t \mapsto \text{Log } t$ est aussi continue sur $]0, +\infty[$

donc g l'est aussi . De plus on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\text{Log } t) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 = g(0)$$

donc g est continue en 0^+ .

Conclusion : g est continue sur $[0, +\infty[$; d'où $F(x)$ est bien définie sur $[0, +\infty[$.

2°/ La fonction g est continue sur $[0, +\infty[$, soit G une primitive de g sur $[0, +\infty[$.

On a donc $F(x) = G(x) - G(1)$ et par suite F est dérivable sur $[0, +\infty[$ car G l'est aussi puisque c'est une primitive de g et on a :

$$F'(x) = G'(x) = g(x) = f(\log x) = \frac{x}{x - \log x} \text{ pour tout } x \in]0, +\infty[.$$

3°/ a) Soit $k(x) = \log t - t + 1$. on étudie les variations de k et en déduire le signe de $k(x)$ sur $]0, +\infty[$, on obtient $\log t - t + 1 < 0$ pour tout $t > 0$. Donc $1 < t - \log t$ et par suite

$$\frac{1}{t - \log t} < 1 \Rightarrow \frac{t}{t - \log t} < t \text{ car } t > 0.$$

$$b) \text{ Pour } x \in]0, 1[\text{ on a } F(x) = \int_x^1 F'(t) dt = \int_x^1 \frac{t}{t - \log t} dt.$$

$$\text{Or on a : } \frac{t}{t - \log t} < t \Rightarrow \int_x^1 \frac{t}{t - \log t} dt \leq \int_x^1 t dt = \frac{1 - x^2}{2}$$

$$\text{alors : } F(1) - F(x) \leq \frac{1 - x^2}{2}$$

$$\text{Donc } \frac{x^2 - 1}{2} \leq F(x) \leq 0 \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

4°/ a) • $t \geq 1$ alors $\log t \geq 0$ car $t \mapsto \log t$ est croissante ; donc $(\log t)^2 \geq 0$

et donc $-(\log t)^2 \leq 0 \Rightarrow t^2 - (\log t)^2 \leq t^2 \Rightarrow (t - \log t)(t + \log t) \leq t^2$ et

par suite on a : $\frac{t + \log t}{t} \leq \frac{t}{t - \log t}$ (car $t - \log t > 0$ et $t > 0$).

$$\text{Donc : } 1 + \frac{\log t}{t} \leq \frac{t}{t - \log t}.$$

• D'autre part on a : $\log t \geq 0$ pour $t \geq 1$ et $\log t - t + 1 \leq 0$ pour tout $t > 0$

donc :

$$- \log t (\log t - t + 1) \geq 0 \quad \text{donc}$$

$$- (\log t)^2 + t \log t - \log t + t \geq t \quad \text{alors :}$$

$$(t - \log t)(1 + \log t) \geq t \text{ d'où } \frac{t}{t - \log t} \leq 1 + \log t.$$

Conclusion : Pour tout $t \geq 1$ on a : $1 + \frac{\log t}{t} \leq \frac{t}{t - \log t} \leq 1 + \log t.$

D'où pour $x > 1$ on a : $\int_1^x \left(1 + \frac{\text{Log } t}{t}\right) dt \leq \int_1^x \frac{t}{t - \text{Log } t} dt \leq \int_1^x (1 + \text{Log } t) dt$

Et donc : $(x-1) + \left[\frac{1}{2}(\text{Log } t)^2\right]_1^x \leq F(x) \leq (x-1) + [t \text{Log } t - t]_1^x$.

Donc : $x - 1 + \frac{1}{2}(\text{Log } x)^2 \leq F(x) \leq x \text{Log } x$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - 1 + \frac{1}{2}(\text{Log } x)^2] = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison

des limites on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

PROBLEME 2

$$n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} f_n(x) = x (\text{Log } x)^n \text{ si } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

$$A^\circ / 1^\circ / a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x (\text{Log } x)^n.$$

On pose $x = t^n$ on a alors : si $x \rightarrow 0^+$ alors : $t \rightarrow 0^+$.

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^n (\text{Log } t^n)^n = \lim_{t \rightarrow 0^+} (n t \text{Log } t)^n = 0$$

$$\text{Car } \lim_{t \rightarrow 0^+} t \text{Log } t = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = 0 = f_n(0)$; d'où f_n est continue à droite en 0

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\text{Log } x)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log } x = -\infty.$$

Dans les deux cas on a f n'est pas dérivable en 0 à droite.

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$, f_n est dérivable et on a :

$$f_n'(x) = (\text{Log } x)^n + n x (\text{Log } x)^{n-1} \frac{1}{x} = (\text{Log } x)^{n-1} [\text{Log } x + n]$$

2° / a) **cas où n impair :**

Pour $n = 1$ on a $f_1'(x) = \text{Log } x + 1$.

$$f_1'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Log } x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{Log} x = +\infty$$

pour $n \geq 3$ on a $f_n'(x) = 0 \Leftrightarrow (\operatorname{Log} x)^{n-1} = 0$ ou $\operatorname{Log} x + n = 0$

donc $x = 1$ ou $x = e^{-n}$

$$f_n(e^{-n}) = e^{-n}(\operatorname{Log} e^{-n})^n = e^{-n}(-n)^n = (-1)^n \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Si n impair donc $n-1$ est impair	pour n impair on a $(-1)^n = -1$ donc $f_n(e^{-n}) = -\left(\frac{n}{e}\right)^n$
donc $(\operatorname{Log} x)^{n-1} > 0 \quad \forall x > 0$	

et on a : $\operatorname{Log} x + n > 0$ pour $x > e^{-n}$

cas ou n pair :

$f_n'(x) = 0$ pour $x = 1$ ou $x = e^{-n}$.

On a n pair donc $(n-1)$ impair et $(\operatorname{Log} x)^{n-1} > 0$ pour $x > 1$

et $(\operatorname{Log} x)^{n-1} < 0$ pour $x < 1$ et on a : $f_n(e^{-n}) = \left(\frac{n}{e}\right)^n$

b) Soit $M(x, y)$ un point fixe de ξ_n on a donc :

pour $x = 1$ on a $y = 0 \Rightarrow A(1, 0)$

pour $x = e$ on a $y = e \Rightarrow B(e, e)$

les points O, A, B sont des points de ξ_n indépendantes de n , donc

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les courbes ξ_n passent par A, B et C

3°/a) $f_2(x) - f_1(x) = x \operatorname{Log} x [\operatorname{Log} x - 1]$. $f_2(x) - f_1(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = e$$

On a donc : * $f_2(x) - f_1(x) > 0$ si $x \in]0, 1[\cup]e, +\infty[$

alors ξ_2 est au dessus de ξ_1

$$* f_2(x) - f_1(x) < 0 \text{ si } x \in]1, e[$$

alors ξ_2 est au dessous de ξ_1

$$* f_2(x) - f_1(x) = 0 \text{ pour } x = 1 \text{ ou } x = e$$

$$\text{alors } \xi_2 \cap \xi_1 = \{A, B\}.$$

$$b) A = \int_1^e -x \operatorname{Log} x [\operatorname{Log} x - 1] dx \quad x \text{ cm}^2$$

$$= \left[\int_1^e x \operatorname{Log} x dx - \int_1^e x (\operatorname{Log} x)^2 dx \right] \times 4 \text{ cm}^2$$

$\int_1^e x \operatorname{Log} x \, dx$; on intègre par parties ; on pose :

$$u(x) = \operatorname{Log} x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{donc } \int_1^e x \operatorname{Log} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \operatorname{Log} x \right]_1^e - \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e = -\frac{e^2}{2} + \frac{1}{4}$$

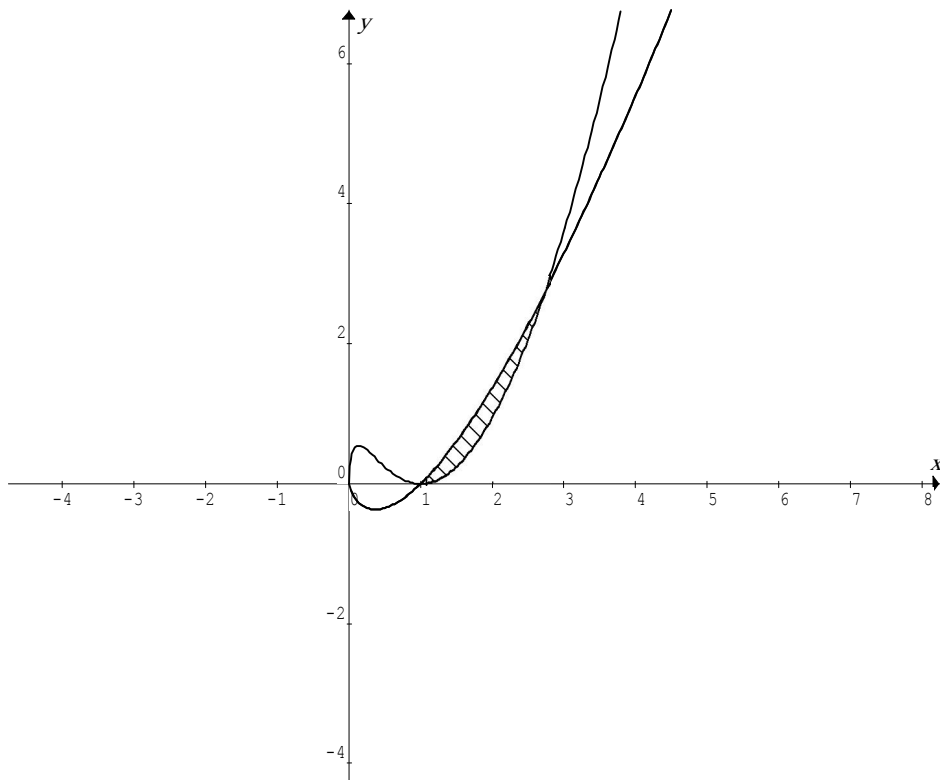
$\int_1^e x (\operatorname{Log} x)^2 \, dx$; on intègre par parties :

$$u(x) = (\operatorname{Log} x)^2 \Rightarrow u'(x) = 2 \frac{1}{x} \operatorname{Log} x.$$

$$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

$$\int_1^e x (\operatorname{Log} x)^2 \, dx = \left[\frac{x^2}{2} (\operatorname{Log} x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \operatorname{Log} x \, dx$$

$$\text{donc } A = -\frac{e^2}{2} + 2 \left(\frac{1}{4} + \frac{e^{-2}}{4} \right) \times 4 \, \text{cm}^2 \quad \text{donc } A = 2 \, \text{cm}^2.$$



$$B^{\circ}) F_n(x) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha \in]0, 1[$$

$$1^{\circ} / a) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx \text{ et } \int_0^1 f_n(x) dx \text{ existe et finie car } f_n \text{ est}$$

continue sur $[0, 1]$

$$b) F_n(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx = \int_{\alpha}^1 x \log x dx$$

$$\text{donc } F_1(\alpha) = \left[\frac{x^2}{2} \log x \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^2}{2} \log \alpha - \frac{1}{4}(1 - \alpha^2)$$

$$u_1 = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F_1(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{2} \log \alpha - \frac{1}{4}(1 - \alpha^2) = -\frac{1}{4};$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow 0} x \log x = 0$$

$$2^{\circ} / \alpha \in]0, 1[\text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) F_{n+1}(\alpha) = \int_{\alpha}^1 f_n(x) dx = \int_{\alpha}^1 x (\log x)^{n+1} dx. \text{ On intègre par parties :}$$

$$\text{On pose : } u(x) = (\log x)^{n+1} \Rightarrow u'(x) = (n+1) \frac{(\log x)^n}{x}$$

$$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{Donc } F_{n+1}(\alpha) = \left[\frac{x^2}{2} (\log x)^{n+1} \right]_{\alpha}^1 - \frac{n+1}{2} \int_{\alpha}^1 x (\log x)^n dx$$

$$F_{n+1}(\alpha) = -\frac{\alpha^2}{2} (\log \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha)$$

$$b) \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F_{n+1}(\alpha) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[-\frac{\alpha^2}{2} (\log \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} F_n(\alpha) \right]$$

$$u_{n+1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} F_{n+1}(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -\frac{\alpha^2}{2} (\log \alpha)^{n+1} - \frac{n+1}{2} u_n$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \alpha^2 (\log(\alpha))^{n+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{n+1}{2} (x \log x) \right]^{n+1} 0; \text{ Avec } \alpha = x^{\frac{n+1}{2}}$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = -\left(\frac{n+1}{2}\right) u_n$$

$$3^{\circ} / a- A_n = \int_0^1 |f_n(x)| dx \quad x \in]0, 1[$$

$$\text{on a : } I_n(x) = \int_x^1 f_n(x) dx$$

donc $A_n = 4 \left| I_n \right| \text{ cm}^2$, or $|u_{n+1}| = \frac{n+1}{2} |u_n|$ donc

$$4 |u_{n+1}| = 2(n+1) |I_n|$$

par itération :

$$4 |u_2| = 2(2) |u_1|$$

$$4 |u_3| = 2 \times 3 |u_2|$$

$\vdots$

$$4 |u_n| = 2 n |u_{n-1}|$$

le produit membre à membre donne :

$$4^{n-1} |u_n| = 2^{n-1} n! |u_1| \quad \text{or } |u_1| = \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } 2^{2n-2} |u_n| = 2^{n-1} n! \times \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } 4 |u_n| = \frac{n! 2^{n-1}}{2^{2(n-1)}} = \frac{n!}{2^{n-1}} \quad \text{donc } A_n = \frac{n!}{2^{n-1}}$$

c) $n \geq 3$ Montrons que : $A_{n+1} \geq 2A_n$

$$n \geq 3 \quad \text{donc } n+1 \geq 4 \quad \text{d'où } \frac{n+1}{2} u_n \geq \frac{4}{2} u_n$$

$$\text{donc } \frac{n+1}{2} |u_n| \geq 2 |u_n|$$

$$\text{car } |u_{n+1}| \geq 2 |u_n| \quad \text{donc } 4 |u_{n+1}| \geq 2.4 |u_n| \quad \text{d'où } A_{n+1} \geq 2 A_n$$

Par itération on obtient pour $n \geq 3$ $A_4 \geq 2 A_3$

$$A_5 \geq 2 A_4$$

$\vdots$

$$A_n \geq 2A_{n-1}$$

On obtient après simplification: $A_n \geq 2^{n-3} A_3$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^{n-3} A_3 = +\infty$ car (2^{n-3}) suite géométrique de raison $q = 2 > 1$

et $A_3 > 0$.Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = +\infty$

$$C^0 / F(x) = \int_1^{e^x} t \text{Log} t dt ; x \in \mathbb{R}.$$

1°) a) - la fonction $t \mapsto t \text{Log} t$ est continue sur $]0, +\infty[$ [donc soit G une primitive de $t \mapsto t \text{Log} t$, donc F(x) existe et est dérivable et on a : $F(x) = G(e^x) - G(1)$].

Donc $F'(x) = e^x$. $G'(e^x) = e^x$. $e^x \text{Log} e^x = x e^{2x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$b) F'(x) = x e^{2x}$$

pour $x \geq 0$ on a $F'(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0, +\infty[$

$x < 0$ on a $F'(x) < 0$ donc f est décroissante sur $]-\infty, 0]$

$$2^\circ / a) F(x) = \int_1^{e^x} t \operatorname{Log} t \, dt$$

on intègre par parties : $u(t) = \operatorname{Log} t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$

$$v'(t) = t \Rightarrow v(t) = \frac{t^2}{2}$$

$$\text{donc } F(x) = \left[\frac{t^2}{2} \operatorname{Log} t \right]_1^{e^x} - \frac{1}{2} \int_1^{e^x} t \, dt$$

$$= \frac{(e^x)^2}{2} x - \frac{1}{4} (e^x)^2 + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{x}{2} (e^x)^2 - \frac{1}{4} (e^x)^2 + \frac{1}{4}$$

$$F(x) = \frac{(e^x)^2}{4} [2x - 1] + \frac{1}{4} ; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^2 (2x - 1) + \frac{1}{4}$$

$$\text{car} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x e^x)^2 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x)^2 = 0$$

tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		0	+
$F(x)$	$\frac{1}{4}$	0	$+\infty$

PROBLEME 3

$$A^\circ / f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{2}{e^x} - 1}$$

$$1) D_f = \{x \in \mathbb{R}^* \text{ tel que : } \frac{2}{e^x} - 1 \geq 0\}$$

$$\text{On a : } \frac{2}{e^x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2}{e^x} \geq 1 \Leftrightarrow \text{Log} \left(\frac{2}{e^x} \right) \geq \text{Log} 1 ; \text{Car } x \mapsto \text{Log } x \text{ est}$$

croissante. Donc $\frac{2}{x} \geq 0$ d'où $x > 0$. Donc $D_f =]0, +\infty[$

$$2) g(x) = 1 - x - e^{-2x} \quad \text{pour } x \in [0, +\infty[$$

a- la fonction g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $g'(x) = -1 + 2e^{-2x}$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{2} \text{ donc } -2x = \text{Log} \frac{1}{2} \text{ d'où } x = \frac{\text{Log} 2}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x - e^{-2x}) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0$$

$$* g(0) = 0$$

$$* g\left(\frac{\text{Log} 2}{2}\right) = \frac{\text{Log} 2}{2} \sqrt{e^{\text{Log} 2} - 1} = \frac{\text{Log} 2}{2}$$

x	0	$\frac{\text{Log} 2}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	$\frac{\text{Log} 2}{2}$	$-\infty$

b) On a : g est une bijection de $[\frac{\text{Log} 2}{2}, +\infty[$ sur $]-\infty, \frac{\text{Log} 2}{2}]$ car g

est continue et strictement décroissante sur $[\frac{\text{Log} 2}{2}, +\infty[$ et on

a : $0 \in]-\infty, \frac{\text{Log} 2}{2}]$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une

seule solution $\alpha \in [\frac{\text{Log} 2}{2}, +\infty[$ cela signifie que la courbe ξ_g

coupe $(x'x)$ en un seul point d'abscisse α .

$$\begin{cases} g\left(\frac{\text{Log} 2}{2}\right) = \frac{\text{Log} 2}{2} > 0 \\ g(1) = 1 - 1 - e^{-2} = -e^{-2} < 0 \end{cases}$$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires on a : $\alpha \in]\frac{\text{Log}2}{2}, 1[$

c) d'après les variation de g on a :

$$\begin{aligned} x \in [0, \alpha[& \quad g(x) \geq 0 \\ x \in]\alpha, +\infty[& \quad g(x) < 0 \\ x = \alpha & \quad g(x) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3^\circ) \text{Log}(f(x)) &= \text{Log}(x \cdot \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}) = \text{Log } x + \frac{1}{2} \text{Log}(e^{\frac{2}{x}} - 1) \\ &= \text{Log } x + \frac{1}{2} \text{Log}(e^{\frac{2}{x}} (1 - e^{-\frac{2}{x}})) \\ &= \text{Log } x + \frac{1}{2} \text{Log } e^{\frac{2}{x}} + \frac{1}{2} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) \\ &= \text{Log } x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Log}(f(x)) = \frac{1}{x} [1 + x \text{Log } x] + \frac{1}{2} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} (1 + x \text{Log } x) + \frac{1}{2} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) \right]$$

$$\text{on a } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \text{Log } x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{2}{x}} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}(1 - e^{-\frac{2}{x}}) = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log}(f(x)) = +\infty$$

$$\text{or } f(x) = e^{\text{Log}(f(x))} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\text{finalement } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$4^\circ/\text{a- } f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{e^{2\alpha} - 1}$$

$$\text{or } g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha - e^{-2\alpha} = 0 \quad \text{c'est à dire } e^{-2\alpha} = 1 - \alpha$$

$$\text{d'où } e^{2\alpha} = \frac{1}{1 - \alpha}$$

$$\text{d'où } f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1 - (1 - \alpha)}{1 - \alpha}} \text{ car } \alpha > 0.$$

$$\text{donc } f\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}$$

$$b- f'(x) = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + x \frac{-\frac{2}{x^2} e^{\frac{2}{x}}}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + \frac{-\frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \frac{e^{\frac{2}{x}} - 1 - \frac{1}{x} e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}}$$

$$d'où f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}} [1 - \frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}}]}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g\left(\frac{1}{x}\right) \text{ donc } f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g\left(\frac{1}{x}\right) ;$$

pour tout $x > 0$.

$$c) \text{ on a } f'(x) = 0 \iff g\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ car } \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \neq 0$$

donc $\frac{1}{x} = \alpha$ d'où $x = \frac{1}{\alpha}$ et pour $x \in [\frac{\text{Log } 2}{2}, 1]$ on a g est décroissante

$$\text{donc : si } x \geq \frac{1}{\alpha} \text{ on a } \frac{1}{x} \leq \alpha \text{ c'est à dire } g\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0$$

$$\text{si } x \leq \frac{1}{\alpha} \text{ on a } \frac{1}{x} \geq \alpha \text{ donc } g\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

$$d) f(x) - x = x \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} - x = x [\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} - 1]$$

$$\text{or } x > 0 \text{ alors } \frac{2}{x} > 0 \text{ et } e^{\frac{2}{x}} > 1 \text{ donc } \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} > 0$$

$$f(x) - x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } e^{\frac{2}{x}} - 1 = 1$$

$$\iff x = 0 \text{ ou } e^{\frac{2}{x}} = 2 \text{ donc } x = \frac{2}{\text{Log } 2}$$

$$\text{car : on a } x \geq \frac{2}{\text{Log } 2} \implies \frac{2}{x} \leq \text{Log } 2 \implies e^{\frac{2}{x}} - 2 \leq 0$$

$$\implies e^{\frac{2}{x}} - 1 \leq 1 \implies \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} \leq 1 \text{ et donc } f(x) - x \leq 0$$

$$\text{donc pour } x \in]0, \frac{2}{\text{Log } 2}] \text{ on a } \xi_f \text{ au-dessus de } \Delta$$

$$\text{pour } x \in]\frac{2}{\text{Log } 2}, +\infty[\text{ on a } \xi_f \text{ au-dessous de } \Delta$$

$$B^{\circ} / h :] \frac{1}{\alpha}, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x)$$

1) on a h est décroissante, continue sur $] \frac{1}{\alpha}, +\infty[$ donc elle

réalise une bijection de $] \frac{1}{\alpha}, +\infty[$ dans $h[\frac{1}{\alpha}, +\infty[=] -\infty, \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}} [$

2) a- h est dérivable sur $] \frac{1}{\alpha}, +\infty[$ et $h'(x) \neq 0$ pour tout

$$x \in] \frac{1}{\alpha}, +\infty[\text{ donc } h^{-1} \text{ est dérivable sur }] \sqrt{\frac{1}{\alpha - \alpha^2}}, +\infty[$$

b- la courbe ξ' de h^{-1} est symétrique de ξ_h par rapport à $y = x$

$$3) \begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $2/\text{Log}2 \leq u_n \leq 4$

$$* \text{ Pour } n = 0 \quad \text{on a } u_0 = 4 \in [2/\text{Log}2, 4]$$

Supposons qu'on a $\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_n \leq 4$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et

montrons qu'on a :

$$\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

On a sur $[\frac{2}{\text{Log}2}, 4]$; f est décroissante donc : $f(4) \leq f(u_n) \leq f(\frac{2}{\text{Log}2})$

$$\text{Donc } 4\sqrt{e^2 - 1} \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{\text{Log}2} \sqrt{e^{\frac{4}{\text{Log}2}} - 1} \quad \text{Or } 4\sqrt{e^2 - 1} > \frac{2}{\text{Log}2}$$

$$\text{et } \frac{2}{\text{Log}2} \sqrt{e^{\frac{4}{\text{Log}2}} - 1} < 4 \quad . \text{ Donc } \frac{2}{\text{Log}2} \leq u_{n+1} \leq 4$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\frac{2}{\text{Log}2} \leq u_n \leq 4$

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$$

on a $f(x) - x \leq 0$ pour $x \in [\frac{2}{\text{Log}2}, 4]$ donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$ d'où (u_n) est

décroissante

$$\text{Conclusion} \begin{cases} (u_n) \text{ décroissante} \\ (u_n) \text{ minorée par } \frac{2}{\text{Log}2} \end{cases}$$

donc (u_n) convergente

soit ℓ sa limite on a donc $\ell = f(\ell)$

$$\text{donc } \ell = \frac{\text{Log} 2}{2} \quad (\text{car } f\left(\frac{\text{Log} 2}{2}\right) = \frac{\text{Log} 2}{2})$$

$$C^\circ / \varphi : P \rightarrow P$$

$$M_{(z)} \mapsto M'_{(z')} \quad \text{tel que } z' = \frac{\bar{z}}{\text{Log}|z|}$$

Avec $z \in C^* \setminus \{|z| = 1\}$

$$1) \quad M(x, y) \text{ et } M'(X, Y)$$

$$\text{On a } X + iY = \frac{x - iy}{\text{Log} \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2)} + i \frac{-y}{\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2)}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} X = \frac{x}{\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2)} \\ Y = \frac{-y}{\frac{1}{2} \text{Log}(x^2 + y^2)} \end{cases}$$

$$2) \quad x \neq 1 \text{ et } M \text{ distinct de } A(1, 0)$$

$$\text{donc : } \begin{cases} X = \frac{1}{\frac{1}{2} \text{Log}(1 + y^2)} & (1) \\ Y = \frac{-y}{\frac{1}{2} \text{Log}(1 + y^2)} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \implies \frac{1}{2} \text{Log}(1 + y^2) = \frac{1}{x}$$

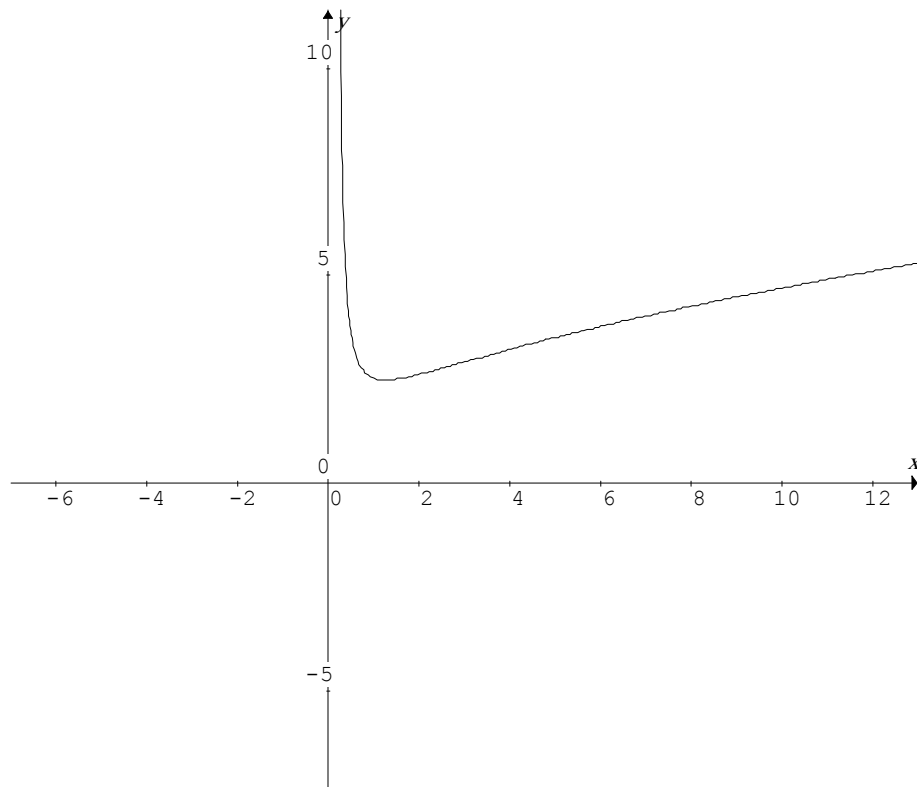
$$\implies \text{donc } \frac{2}{x} = \text{Log}(1 + y^2) \quad \text{d'où } e^{2/x} = 1 + y^2$$

$$\text{donc } y^2 = e^{2/x} - 1 \quad \rightarrow \quad y = \mp \sqrt{e^{2/x} - 1}$$

$$\text{donc } Y = - \frac{\mp \sqrt{e^{2/x} - 1}}{\frac{1}{x}} = \mp x \sqrt{e^{2/x} - 1}$$

$$\text{donc } \begin{cases} Y = x \sqrt{e^{2/x} - 1} \\ \text{ou} \\ Y = -x \sqrt{e^{2/x} - 1} \end{cases}$$

$$\text{Donc } E = \xi_f \cup \xi_1 \text{ avec } \xi_1 = S_{(x', x)}(\xi_f).$$



PROBLEME 4

A°/

1°/ a) $f_1(x) = \frac{e^x}{x+1}$; $\forall x \in]-1; +\infty[$

La fonction f_1 est dérivable sur $] -1; +\infty [$ (quotient de deux fonctions

dérivables), et on a : $f_1'(x) = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{x e^x}{(1+x)^2}$. Soit donc le

tableau de variations de f_1 :

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f_1(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = +\infty$
- $f_2(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}; \forall x \in]-1; +\infty[$

f_2 est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et $f_2'(x) = \frac{e^x(1+x)^2 - 2(x+1)e^x}{(1+x)^4}$

$$\text{d'où } f_2'(x) = \frac{e^x(1+x-2)}{(1+x)^3} = \frac{(x-1)e^x}{(1+x)^3}$$

Soit donc le tableau de variation de f_2 :

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$

- $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f_2(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{(x+1)^2} = +\infty$ (voir Ex. Chapitre IV)

b) Position de ξ_1 et ξ_2 :

- $f_2(x) - f_1(x) = \frac{-xe^x}{(1+x)^2}; \forall x \in]-1; +\infty[.$

Donc

- $\forall x \in]-1; 0[$ on a $f_2(x) - f_1(x) > 0 \Rightarrow \xi_2$ au-dessus de ξ_1 .
- $\forall x \in]-1; +\infty[$ on a $f_2(x) - f_1(x) < 0 \Rightarrow \xi_2$ au-dessous de ξ_1 .
- Pour $x = 0$ on a $f_2(x) = f_1(x)$ donc $\xi_1 \cap \xi_2 = \{(0, 1)\}$.

Etudions les branches infinies à ξ_2 et ξ_1 :

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x(x+1)} = +\infty.$$

Donc la courbe ξ_1 admet une branche infinie parabolique de direction $(\vec{oj})$ en $+\infty$.

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3} \cdot \frac{x^3}{x(x+1)^2} = +\infty.$$

Donc la courbe de ξ_2 admet au voisinage de $+\infty$, une branche infinie parabolique de direction $(\vec{oj})$.

* La droite d'équation $x = -1$ est une asymptote verticale à ξ_1 et ξ_2 .

c) soit D la partie du plan limité par ξ_1 , ξ_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

$$\text{On a : } A(D) = \left(\int_0^1 (f_1(x) - f_2(x)) dx \right) \times 4 \text{ cm}^2 = \left(\int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx \right) \times 4 \text{ cm}^2$$

On intègre par parties ; on pose :

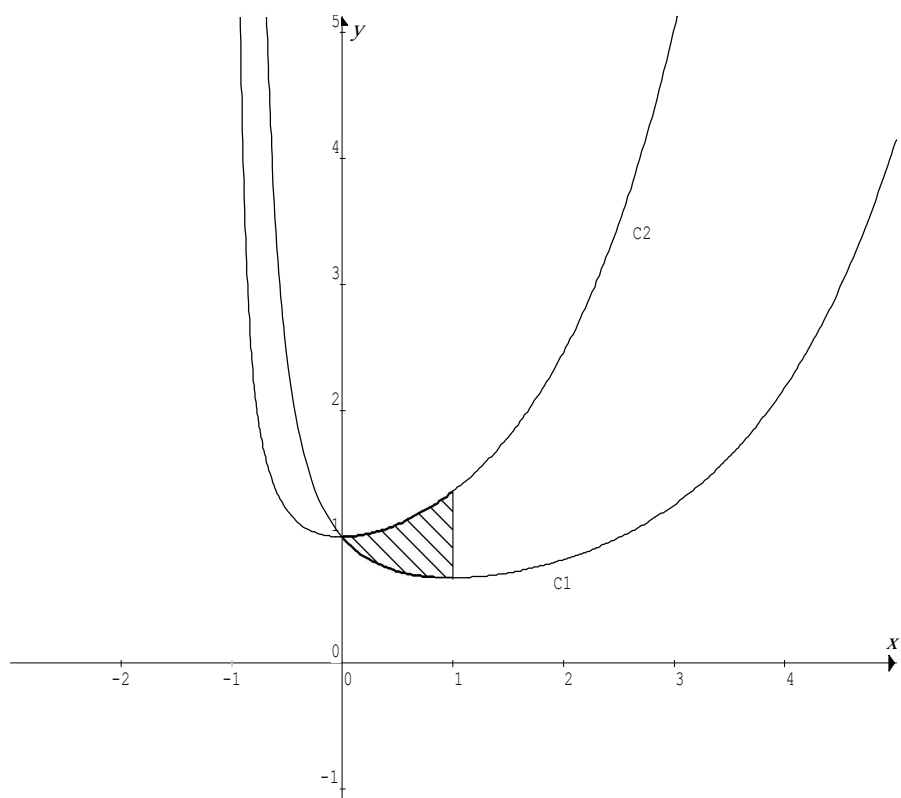
$$U(x) = x e^x \quad \Rightarrow \quad U'(x) = e^x(x+1)$$

$$V'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad \Rightarrow \quad V(x) = \frac{-1}{x+1}.$$

On a donc :

$$A(D) = \left(\left[\frac{-x e^x}{1+x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx \right) \times 4 \text{ cm}^2 = \left(\frac{-e}{2} + e - 1 \right) 4 \text{ cm}^2 = \left(\frac{e}{2} - 1 \right) 4 \text{ cm}^2$$

d'où $A(D) = (2e - 4) \text{ cm}^2$.



2°/ U_n est la valeur minimal de f_n sur $]-1; +\infty[$.

a) La fonction f_n est dérivable sur $]-1; +\infty[$ et $f'_n(x) = \frac{e^x(x+1-n)}{(1+x)^{n+1}}$.

On a donc :

x	-1	n-1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e^{n-1}}{(n)^n}$	$+\infty$

La fonction f_n admet au point $(n-1)$ un minimum absolu égal à $f_n(n-1)$; donc $U_n = f_n(n-1)$.

$$b) f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{e^x [1 - (x+1)]}{(x+1)^{n+1}} = \frac{-x e^x}{(x+1)^{n+1}} \leq 0 ; \forall x \geq 0 \text{ on a } f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

Pour $x = n$ on a $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log} \left(\frac{e^{n-1}}{n^n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Log } e^{n-1} - \text{Log } n^n) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} (n - 1 - n \text{Log } n) = -\infty$$

On pose $N = \text{Log } U_n \Rightarrow U_n = e^N$

Si n tend vers $+\infty$ alors N tend vers $-\infty$ et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{N \rightarrow +\infty} e^N = 0$

$$B^o) \text{ Pour } x \in]\frac{1}{e}, +\infty[; \text{ on a } F(x) = \int_0^{\text{Log } x} f_2(t) dt$$

1°/ La fonction f_2 est continue sur $] -1, +\infty[$ et par suite elle est continue sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$ donc F est bien définie sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

$$2^o / \forall x \in]\frac{1}{e}, +\infty[\text{ on a : } F(x) = \int_0^{\text{Log } x} \frac{e^t}{1+t^2} dt$$

on a donc $0 \leq t \leq \text{Log } x \Rightarrow 1 \leq e^t \leq x (e^{\text{Log } x} = x)$

$$\Rightarrow \frac{e^t}{(1+t)^2} \leq \frac{x}{(1+t)^2} \Rightarrow \int_0^{\text{Log } x} \frac{e^t}{1+t^2} dt \leq \int_0^{\text{Log } x} \frac{x}{(1+t)^2} dt$$

$$\Rightarrow F(x) \leq x \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^{\text{Log } x} / \forall x \in]\frac{1}{e}, +\infty[.$$

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} x \left(1 - \frac{1}{1 + \text{Log } x} \right) = -\infty \text{ Car } \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} \frac{1}{1 + \text{Log } x} = +\infty$$

Donc d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{e})^+} F(x) = -\infty$$

$$3^o / a) \text{ Pour } x > \frac{1}{e} \text{ on a : } F(x) = \int_0^{\text{Log } x} \frac{x}{(1+t)^2} dt$$

$$\text{On intègre par parties : On pose } U(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \Rightarrow U'(t) = \frac{-2}{(1+t)^3}$$

$$V'(t) = e^t \Rightarrow V(t) = e^t$$

On a donc $F(x) = \left[\frac{e^t}{(1+t)^2} \right]_0^{\text{Log} x} + 2 \int_0^{\text{Log} x} \frac{e^t}{(1+t)^3} dt$

Donc $F(x) = \frac{e^{\text{Log} x}}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\text{Log} x} f_3(t) dt$

$$F(x) = \frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\text{Log} x} f_3(t) dt .$$

Comme $f_3(t) \geq 0$; $\forall t \in]-1, +\infty[$ alors on a : $\int_0^{\text{Log} x} f_3(t) dt \geq 0$

$$\frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\text{Log} x} f_3(t) dt \geq \frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1$$

Donc $F(x) \geq \frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 .$

Et on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{1+\text{Log} x} \right)^2 - 1$

On pose $X = \sqrt{x}$ ou si x tend vers $+\infty$ alors X d'est aussi

et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(1+\text{Log} x)^2} - 1 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{X}{1+\text{Log} X} \right)^2 - 1 = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{X} + 2 \frac{\text{Log} X}{X}} \right)^2 - 1 = +\infty$$

donc d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty .$$

4°/ La fonction f_2 est continue sur $] -1, +\infty[$ donc elle possède une primitive G et on a donc : $F(x) = G(\text{Log} x) - G(0)$

G est dérivable sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$ et $x \mapsto \text{Log} x$ l'est aussi donc F est

dérivable sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$ (composée des fonctions dérivables) et on a :

$$F'(x) = \frac{e^{\text{Log} x}}{(1+\text{Log} x)^2} \cdot \frac{1}{x}$$

D'où $F'(x) = \frac{1}{(1+\text{Log})^2} > 0$ donc F est strictement croissante

sur $]\frac{1}{e}, +\infty[$.

Soit donc le tableau de variation de F :

x	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$F'(x)$	+	
$F(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Ainsi la fonction F est une bijection de $]\frac{1}{e}, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

C°) $\forall x \geq 1$ on a : $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$

$$1^\circ / I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt$$

or $\forall x \in [0, 1]$ et $n \geq 0$ on a : $f_{n+1}(t) - f_n(t) \leq 0$

donc $\int_0^1 (f_{n+1}(t) - f_n(t)) dt \leq 0$ donc $I_{n+1} \leq I_n$

d'où la suite (I_n) est décroissante.

On a : $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$ et $\forall t \in [0, 1]$ on a $f_n(t) \geq 0$

$\Rightarrow I_n \geq 0$ donc (I_n) est minorée par 0

donc (I_n) minorée par 0 est décroissante d'où elle est convergente.

$$2^\circ / a) I_n = \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \frac{e^t}{(1+t)^n} dt$$

on a donc : $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow t \leq e^t \leq e$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+t)^n} \leq \frac{e^t}{(1+t)^n} \leq \frac{e}{(1+t)^n}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^n} \leq I_n \leq \int_0^1 \frac{e}{(1+t)^n} dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{(1+t)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \right]_0^1 \leq I_n \leq \left[e \cdot \frac{1}{(1+t)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-n} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right) \leq I_n \leq \frac{e}{1-n} \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-n} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) \leq I_n \leq \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right)$$

b) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ (Suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$)

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0.$$

D'où d'après le théorème de comparaison de limites on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$\begin{aligned} 3^\circ / a) f'_n(x) &= \frac{e^x(x-n+1)}{(x+1)^{n+1}} = \frac{e^x(x+1-n)}{(x+1)^{n+1}} \\ &= \frac{e^x}{(x+1)^n} - n \frac{e^x}{(x+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x)$$

$$b) \text{ On a donc } \int_0^1 f'_n(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx - n \int_0^1 f_{n+1}(x) dx$$

$$\Rightarrow I_n - n I_{n+1} = \frac{e}{2^n} - 1$$

$$\text{d'où : } n I_{n+1} = I_n - \frac{e}{2^n} + 1$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{2^n} = 0. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n I_{n+1} = 1.$$

