Mathématiques

$4^{ème}$ Maths

SÉRIE D'EXERCICES

Thème : Arithmétiques

Professeur :

Elabidi Zahi

Exercice 01 (Bac Tunisien 2015 – Session principale)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 47x+53y=1$
   a) Vérifier que $(-9;8)$ est une solution de (E)
   b) Résoudre l'équation (E)
   c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53
   d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53
2) a) Justifier que $45^{52}\equiv 1 \pmod{53}$
   b) Déterminer alors le reste de 45^{106} modulo 53
3) Soit $N=1+45+45^2+...+45^{105}=\sum_{k=0}^{105}45^k$
   a) Montrer que $44N\equiv 10\pmod{53}$
   b) En déduire le reste de N modulo 53

Exercice 02

1) a) Vérifier que 503 est un nombre premier
   b) Montrer que $7^{502}\equiv 1\pmod{503}$ puis en déduire que $7^{2008}\equiv 1\pmod{503}$
2) Considérons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 49x-6y=1$
   Vérifier que $(1;8)$ est une solution particulière de (E) puis la résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
3) Soit $n=1+7+7^2+...+7^{2007}$
   a) Montrer que le couple $(7^{2006};n)$ est une solution de (E)
   b) Montrer que $n\equiv 0\pmod 4$ et que $n\equiv 0\pmod{503}$
   c) En déduire que n est divisible par 2012

Exercice 03

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul

On pose $S=1+p+p^2+...+p^{n-1}$

1) a) Ecrire S sous forme d'un quotient
   b) Calculer l'expression $p^n+(1-p)S$ et en déduire que p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux
2) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $p^n x-(1-p)y=p$
   b) En déduire, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation $10^n x+2^{n+2}y-10.2^{n-1}=0$

Exercice 04

1) Vérifier que 101 est un nombre premier
2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 77x+100y=1$
   a) Vérifier que le couple $(13,-10)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

3) On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(F): x^{77} \equiv 3 \pmod{101}$

Soit x une solution de F

a) Montrer que x et 101 sont premiers entre eux puis que $x^{100} \equiv 1 \pmod{101}$

b) Montrer que $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$

4) Soit x un entier naturel Montrer que si $x \equiv 3^{13} \pmod{101}$ alors x est une solution de (F)

5) En déduire que l'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des entiers naturels de la forme $101k+38$, où $k \in \mathbb{N}$

Exercice 05

1) On considère l'équation $(E): 13x - 7y = 5$ où $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

a) Vérifier que le couple $(2;3)$ est une solution particulière de (E)

b) Résoudre l'équation (E)

c) Le plan est rapporté à un repère cartésien $(O;\vec{i};\vec{j})$. Déterminer les points de coordonnées entières comprises entre 0 et 30 appartenant à la droite d'équation : $13x - 7y - 5 = 0$

2) Soit n un entier vérifiant le système : $\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{13} \\ n \equiv 6 \pmod{7} \end{cases}$

Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 91

3) Pour tout entier k, on pose : $a = 7k+2$ et $b = 13k+3$ et on note : $d = a \wedge b$

a) Quelles sont les valeurs possibles de d ?

b) Montrer que : $d = 5$ équivaut à $k \equiv 4 \pmod{5}$

c) Déduire le PGCD des nombres : $7\times 2014^{2p+1}+2$ et $13\times 2014^{2p+1}+3$ pour tout $p \in \mathbb{N}$

Exercice 06 (Bac Tunisien 2012 – Session de contrôle)

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 7x + 18y = 9$

a) Vérifier que le couple $(9;-3)$ est une solution particulière de (E)

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

2) Résoudre alors dans $\mathbb{Z}$, le système $\begin{cases} n \equiv 6 \pmod{7} \\ n \equiv 15 \pmod{18} \end{cases}$

CORRECTION

Correction de l'exercice 01

1) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 47x+53y=1$

a) On $47\times(-9)+53\times 8=-423+424=1 \Rightarrow (-9;8)$ est une solution de (E)

b) $(x;y)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow 47x+53y=47\times(-9)+53\times 8$

$$\Rightarrow 47(x+9)=53\times(8-y) \Rightarrow \begin{cases} 53 \text{ divise } 47(x+9) \\ 47(x+9)=53\times(8-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 53 \text{ divise } (x+9) \text{ car } 53\wedge 47=1 \\ 47(x+9)=53\times(8-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=53k-9\ ; k\in\mathbb{Z} \\ 47(x+9)=53\times(8-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=53k-9\ ; k\in\mathbb{Z} \\ 47\times \cancel{53}k=\cancel{53}\times(8-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=53k-9\ ; k\in\mathbb{Z} \\ y=-47k+8 \end{cases}$$

Réciproquement : $\forall k\in\mathbb{Z}\ , 47\times(53k-9)+53\times(-47k+8)=47\times(-9)+53\times 8=1$

Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(53k-9;-47k+8)\ ; k\in\mathbb{Z}\}$

c) x est un inverse de 47 modulo 53 $\Leftrightarrow 47x\equiv 1(\text{mod } 53)$

$\Leftrightarrow$ il existe $p\in\mathbb{Z}$ tel que $47x=1+53p \Leftrightarrow 47x+53(-p)=1 \Leftrightarrow (x;-p)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=53k-9\ ; k\in\mathbb{Z}$

Donc l'ensemble des inverse de 47 modulo 53 est $\{53k-9\ ; k\in\mathbb{Z}\}$

d) Soit x le plus petit inverse positif de 47 modulo 53 alors :

$\begin{cases} 53k-9>0 \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>\dfrac{9}{53} \\ k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k\geq 1$ donc le plus petit inverse positif de 47 modulo 53 correspond à $k=1$ donc $53\times 1-9=44$ est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53

2) a) $\left.\begin{array}{l} 53 \text{ est un nombre premier} \\ 53\wedge 45=1 \end{array}\right\}$ alors d'après Fermat $45^{53-1}\equiv 1\,\text{mod}(53) \Rightarrow 45^{52}\equiv 1\,\text{mod}(53)$

b) $45^{52}\equiv 1(\text{mod } 53) \Rightarrow \left(45^{52}\right)^2\equiv 1^2(\text{mod } 53) \Rightarrow 45^{104}\equiv 1(\text{mod } 53)$

$45^2\times 45^{104}\equiv 45^2(\text{mod } 53)$ et puisque $45^2\equiv 11(\text{mod } 53)$ alors $45^{106}\equiv 11(\text{mod } 53)$

Alors 11 est le reste de 45^{106} modulo 53

3) Soit $N=1+45+45^2+\ldots+45^{105}=\displaystyle\sum_{k=0}^{105}45^k$

a) N est la somme de 106 termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 45 alors $N=\dfrac{1-45^{106}}{1-45}=\dfrac{45^{106}-1}{44} \Rightarrow 44N=45^{106}-1$ et puisque

$45^{106}\equiv 11(\text{mod } 53)$ alors $45^{106}-1\equiv 10(\text{mod } 53) \Rightarrow 44N\equiv 10(\text{mod } 53)$

b) $44N\equiv 10(\text{mod } 53) \Rightarrow 47\times 44N\equiv 470(\text{mod } 53)$

Or $47\times 44\equiv 1(\text{mod } 53) \Rightarrow 44\times 47=1+53n$ où $n\in\mathbb{Z}$ alors $(53n+1)N\equiv 470(\text{mod } 53)$

$\Rightarrow 53n.N+N\equiv 470(\text{mod } 53) \Rightarrow N\equiv 470(\text{mod } 53)$ car $\Rightarrow 53n.N\equiv 0(\text{mod } 53)$ et puisque $470\equiv 46(\text{mod } 53)$ alors $N\equiv 46(\text{mod } 53)$ donc 46 est le reste de N modulo 53

Correction de l'exercice 02

1) a) On a : $\sqrt{503} \approx 22,42$ et les nombres premiers qui sont inférieurs à $\sqrt{503}$ sont $2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 11\ ;\ 13\ ;\ 17$ et 19 et aucun de ces nombre divise 503 alors 503 est un nombre premier

b) $\left.\begin{array}{l}503 \text{ est un nombre premier} \\ 503 \wedge 7 = 1\end{array}\right\}$ alors d'après Fermat $7^{503-1} \equiv 1 \bmod(53) \Rightarrow 7^{502} \equiv 1 \bmod(503)$

Ainsi $7^{502} \equiv 1 (\bmod 503) \Rightarrow \left(7^{502}\right)^4 \equiv 1^4 (\bmod 503) \Rightarrow 7^{2008} \equiv 1 (\bmod 503)$

2) Considérons dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 49x - 6y = 1$

On $49\times1 - 6\times8 = 49 - 48 = 1 \Rightarrow (1;8)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$(x;y)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \Rightarrow 49x - 6y = 49\times1 - 6\times8$

$$\Rightarrow 49(x-1) = 6(y-8) \Rightarrow \begin{cases}6 \text{ divise } 49(x-1) \\ 49(x-1) = 6\times(y-8)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6 \text{ divise } (x-1) \text{ car } 6\wedge 49 = 1 \\ 49(x-1) = 6\times(y-8)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x = 6k+1\ ;k\in\mathbb{Z} \\ 49(x-1) = 6\times(y-8)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 6k+1\ ;k\in\mathbb{Z} \\ 49\times\cancel{6}k = \cancel{6}\times(y-8)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = 6k+1\ ;k\in\mathbb{Z} \\ y = 49k+8\end{cases}$$

Réciproquement : $\forall k\in\mathbb{Z}\ , 49\times(6k+1) - 6\times(49k+8) = 49 - 48 = 1$

Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(6k+1;49k+8)\ ;k\in\mathbb{Z}\}$

3) Soit $n = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007}$

a) n est la somme de 2008 termes consécutifs d'une suite géométriques de premier terme 1 et de raison 7 alors $n = \dfrac{7^{2008}-1}{6}$

Ainsi $49\times7^{2006} - 6n = 7^2\times7^{2006} - (7^{2008}-1) = 7^{2008} - 7^{2008} + 1 = 1$

Alors le couple $(7^{2006};n)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) $n = 1 + 7 + 7^2 + \ldots + 7^{2007} = (1+7) + (7^2+7^3) + \ldots(7^{2006}+7^{2007})$

$= (1+7) + 7^2\times(1+7) + \ldots + 7^{2006}\times(1+7) = 8 + 8\times7^2 + 8\times7^4 + \ldots + 8\times7^{2006}$

$= 8\,(1+7^2+7^4+\ldots+7^{2006}) = 4\times2\times(1+7^2+7^4+\ldots+7^{2006}) \Rightarrow 4$ divise n.

Donc $n \equiv 0 (\bmod 4)$

En plus $6n = 7^{2008} - 1 \equiv 0 (\bmod 503)$ car $7^{2008} \equiv 1 (\bmod 503) \Rightarrow 503$ divise $6n$ et puisque $503\wedge6 = 1$ alors d'après Gauss 503 divise $n \Rightarrow n \equiv 0 (\bmod 503)$

c) On a $\left.\begin{array}{l}n \equiv 0 (\bmod 4) \\ n \equiv 0 (\bmod 503) \\ 503\wedge4 = 1\end{array}\right\} \Rightarrow n \equiv 0 (\bmod 4\times503) \Rightarrow n \equiv 0 (\bmod 2012)$.

Donc n est divisible par 2012

Correction de l'exercice 03

Soit p un entier relatif différent de 1 et n un entier naturel non nul

On pose $S = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-1}$

1) a) S est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $p \neq 1$ et de premier terme 1 Alors : $S = \dfrac{1-p^n}{1-p}$

b) On a : $S=\dfrac{1-p^n}{1-p} \Rightarrow p^n+(1-p)S=1$ alors d'après Bézout p^n et $(1-p)$ sont premiers entre eux

2) a) Soit, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E): p^n x-(1-p)y=p$

On a : $\Rightarrow p^n+(1-p)S=1 \Rightarrow p^n\times p-(1-p)(-pS)=p$

Alors $(p;-pS)$ est une solution particulière de l'équation (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

Si $(x;y)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ alors $p^n x-(1-p)y=p$

Et puisque $p^n\times p-(1-p)(-pS)=p$

Alors $p^n x-(1-p)y=p^n\times p-(1-p)(-pS) \Rightarrow p^n(x-p)=(1-p)(y+pS)$

$$\Rightarrow \begin{cases}(1-p) \text{ divise } p^n(x-p)\\ p^n(x-p)=(1-p)(y+pS)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1-p) \text{ divise } (x-p) \text{ car } p^n\wedge(1-p)=1\\ p^n(x-p)=(1-p)(y+pS)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=(1-p)k+p; k\in\mathbb{Z}\\ p^n(1-p)k=(1-p)(y+pS)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=(1-p)k+p; k\in\mathbb{Z}\\ y=p^n k-pS\end{cases}$$

Réciproquement :

$$\forall k\in\mathbb{Z},\ p^n\left((1-p)k+p\right)-(1-p)\left(p^n k-pS\right)=p^n k-p^{n+1}k+p^{n+1}-p^n k+pS+p^{n+1}k-p^2S$$

$$=p^{n+1}+pS-p^2S=p\left(p^n+(1-p)S\right)=p$$

Donc $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\left\{\left((1-p)k+p;p^n k-pS\right);\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

b) Soit, dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(F): 10^n x+2^{n+2}y-10.2^{n-1}=0$ où $n\in\mathbb{N}^*$

(x,y) est solution de (F) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $\Leftrightarrow 10^n x+2^{n+2}y-10.2^{n-1}=0 \Leftrightarrow 2^n.5^n x+2^{n+2}y=5.2^n$

$\Leftrightarrow 5^n x+4y=5 \Leftrightarrow 5^n x-(1-5)y=5 \Leftrightarrow p^n x-(1-p)y=p$ avec $p=5$

Donc $S^F_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\left\{\left(5-4k;5^n k-5(1+5+5^2+\ldots+5^{n-1})\right);\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Correction de l'exercice 04

1) On a : $\sqrt{101}\approx 10,05$ donc les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{101}$ sont 2, 3, 5 et 7 et aucun d'eux ne divise 101 Alors 101 est un nombre premier

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation $(E): 77x+100y=1$

a) On a : $77\times13-10\times100=1$ alors $(13,-10)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

b) (x,y) est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

$\Rightarrow 77x+100y=1 \Rightarrow 77x+100y=77\times13+100\times(-10)$

$$\Rightarrow 77(x-13)=100(-y-10) \Rightarrow \begin{cases}100 \text{ divise } 77(x-13)\\ 77(x-13)=100(-y-10)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}100 \text{ divise } (x-13) \text{ car } 100\wedge77=1\\ 77(x-13)=100(-y-10)\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x=100k+13;k\in\mathbb{Z}\\ 77\times100k=100(-y-10)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=100k+13;\ k\in\mathbb{Z}\\ y=-77k-10\end{cases}$$

Réciproquement : $\forall k\in\mathbb{Z}$, $77(100k+13)+100(-77k-10)=77\times13-10\times100=1$

Alors $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\left\{(100k+13;-77k-10),\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

3) On considère dans $\mathbb{N}$ l'équation $(F): x^{77} \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 101)$

Soit x une solution de F

a) 101 est un nombre premier alors $x \wedge 101 = 101$ ou $x \wedge 101 = 1$

Si $x \wedge 101 = 101 \Rightarrow 101$ divise $x \Rightarrow x \equiv 0(\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow x^{77} \equiv 0(\mathrm{mod}\, 101)$

Ce qui est impossible car $x^{77} \equiv 3(\mathrm{mod}\, 101)$ donc nécessairement $x \wedge 101 = 1$

Par suite x et 101 sont premiers entre eux

Ainsi $\left.\begin{array}{l} 101 \text{ est premier} \\ x \wedge 101 = 1 \end{array}\right\}$ alors d'après Fermat $x^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 101)$

b) On a : $x^{77} \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow x^{77\times 13} \equiv 3^{13} (\mathrm{mod}\, 101)$

Et puisque $77 \times 13 - 10 \times 100 = 1$ alors $77 \times 13 = 100 \times 10 + 1$

Donc $x^{100\times 10+1} \equiv 3^{13} (\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow 3^{13} \equiv x^{100\times 10+1} (\mathrm{mod}\, 101)$

Et comme $x^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 101)$ alors $x^{100\times 10} \equiv 1 \,\mathrm{mod}(101) \Rightarrow x^{100\times 10+1} \equiv x(\mathrm{mod}\, 101)$

Alors $3^{13} \equiv x (\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow x \equiv 3^{13}(\mathrm{mod}\, 101)$

4) Soit x un entier naturel

Si $x \equiv 3^{13} (\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow x^{77} \equiv 3^{13\times 77} (\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow x^{77} \equiv 3^{100\times 10+1} (\mathrm{mod}\, 101)$

$\Rightarrow x^{77} \equiv 3.\left(3^{100}\right)^{10}(\mathrm{mod}\, 101)$

Et puisque $\left.\begin{array}{l} 101 \text{ est premier} \\ 101 \wedge 3 = 1 \end{array}\right\}$ alors d'après Fermat $3^{100} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 101)$

Donc $\left(3^{100}\right)^{10} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 101) \Rightarrow 3.\left(3^{100}\right)^{10} \equiv 3(\mathrm{mod}\, 101)$ par suite $x^{77} \equiv 3 \,\mathrm{mod}(101)$

Alors x est une solution de (F)

5) D'après 3) si x est une solution de (F) alors $x \equiv 3^{13}(\mathrm{mod}\, 101)$

D'après 4) si $x \equiv 3^{13} (\mathrm{mod}\, 101)$ alors x est une solution de (F)

$x \in \mathbb{N}$, x solution de(F) $\Leftrightarrow x \equiv 3^{13}(\mathrm{mod}\, 101)$ et comme $3^{13} = 15785 \times 101 + 38$

alors $3^{13} \equiv 38(\mathrm{mod}\, 101)$

Donc x solution de (F) ,dans $\mathbb{N}$, $\Leftrightarrow x \equiv 38(\mathrm{mod}\, 101) \Leftrightarrow x = 101k + 38\,; k \in \mathbb{N}$ car $x \in \mathbb{N}$