| L. B. Monastir | | 4 ème Math |
|---|---|---|
| P.P. : Ali Zouhaïer | | Séance n : 4 |
| Chapitres : Suites réelles + Dérivabilité + N complexes +... | | |

## Exercice 1 — D'après un devoir

**1**/ On considère la suite réelle $(u_n)$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in IN;\ u_{n+1} = \frac{3n+1}{3n+4}\, u_n$$

**a**- Montrer que $(u_n)$ est décroissante sur IN.

**b**- Prouver que $\forall n \in IN;\ u_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

## Exercice 1

**1/a**- $\forall n \in IN;\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{3n+1}{3n+4}\, u_n - u_n = u_n\left[\dfrac{3n+1}{3n+4} - 1\right] = u_n\, \dfrac{-3}{3n+4}$.

Montrons d'abord que $u_n > 0;\ \forall n \in IN$

$*$ Pour n=0

$u_0 = 1$ donc $u_0 > 0$

¤ Soit $p \in IN$. Supposons que $u_p > 0$; montrons que $u_{n+1} > 0$. En effet

$u_{p+1} = \dfrac{3p+1}{3p+4}\, u_p > 0$ car $\dfrac{3n+1}{3n+4} > 0$ et $u_p > 0$

Ainsi : $*$ et ¤ $\Rightarrow \forall n \in IN;\ u_n > 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} - u_n = u_n\, \dfrac{-3}{3n+4} < 0$

$\Rightarrow \forall n \in IN; u_{n+1} < u_n$

$\Rightarrow (u_n)$ est décroissante sur IN.

**b**- . Pour n=0

$u_0 = 1 = \dfrac{1}{3\times 0+1}$ donc la proposition est vraie pour n=0.

▸ Soit $p \in IN$. Supposons que $u_p = \dfrac{1}{3p+1}$; montrons que $u_{p+1} = \dfrac{1}{3(p+1)+1}$.

En effet : $u_{p+1} = \dfrac{3p+1}{3p+4} u_p = \dfrac{3p+1}{3p+4} \times \dfrac{1}{3p+1} = \dfrac{1}{3(p+1)+1}$.

Conclusion : . et ▸ $\Rightarrow \forall n \in IN;\ u_n = \dfrac{1}{3n+1}$.

**2/a**- $\forall n \in IN;\ S_{n+1} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1} > 0$

Donc $(S_n)$ est croissante sur IN.

**b**- $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$

Or $\forall k \in \{n+1;\ n+2;\ n+3;\ \ldots;\ 2n\}$; $u_k \geqslant u_{2n}$ ( car $(u_n)$ est décroissante)

Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} u_{2n} = n\, u_{2n}$.

Par suite $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geqslant n\, u_{2n}$.

**c**- Supposons par l'absurde que $(S_n)$ est majorée

Comme de plus $(S_n)$ est croissante sur IN alors $(S_n)$ converge vers un réel L donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} S_n = L$

Or on a $\forall n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geqslant n\, u_{2n} = \dfrac{n}{6n+1}$

donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (S_{2n} - S_n) \geqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{n}\times 1}{\cancel{n}\left(6+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{6}$


NetSchool 1 KNOWLEDGE BASE

alors $0 \geqslant \frac{1}{6}$ ce qui est absurde

Par suite notre supposition est fausse et on a $(S_n)$ n'est pas majorée.

**d**- $(S_n)$ est croissante sur IN et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

**2**/ On considère la suite $(S_n)$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

**a**- Prouver que $(S_n)$ est croissante.

**b**- Justifier que $\forall\ n \in IN;\ S_{2n} - S_n \geq n\ u_{2n}$.

**c**- Déduire que $(S_n)$ n'est pas majorée.

**d**- Déterminer alors la limite de $(S_n)$.

## Exercice 2 *D'après un devoir*

On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et pour tout n $\in IN$; $u_{n+1} = \frac{u_n + 6}{u_n + 2}$

**1**/ Montrer que pour tout n$\in IN^*$; $u_n \geq 1$

**2**/**a**- Montrer que pour tout n de IN; $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$ sont de signes contraires.

**b**- En déduire par récurrence que pour tout p de IN; $u_{2p} \leq 2 \leq u_{2p+1}$.

**c**- En déduire que si u est convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

**3**/**a**- Montrer que pour tout n de IN$^*$; $|u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{3}|u_n - 2|$.

**b**- En déduire que pour tout n de IN$^*$; $|u_n - 2| \leq \frac{1}{3^{n-1}}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

**4**/ Soient les suites définies sur IN$^*$ par $a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$ ; $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_{2k+1}$ et

$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k$.

**a**- Montrer que pour k $\in IN$, $2-\frac{3}{9^k} \leq u_{2k} \leq 2$ et $2 \leq u_{2k+1} \leq 2 + \frac{1}{9^k}$.

**b**- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

**c**- Montrer que pour tout n $\in IN^*$; $\begin{cases} S_{2n} = \frac{a_n + b_n}{2} - \frac{u_{2n+1}}{2n} \\ S_{2n+1} = \frac{n(a_n + b_n)}{2n+1} \end{cases}$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

## Exercice 3 *D'après un devoir* .

Soit f la fonction définie sur IR par :

$f(x) = \sqrt{x^2+4} - x \quad si x \in ]-\infty, 0] \quad et \quad f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos(\frac{\pi}{x}) \quad si\ x \in ]0;+\infty[$

**1**/ Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) + 2x]$

**2**/**a**- Montrer que $\forall x \succ 0;\ x^3 - 5x + 2 \leqslant f(x) \leqslant x^3 - 3x + 2$

**b**- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

**c**- Montrer aussi que f est continue en 0.

**3**/ Prouver qu'il existe un réel a dans $[0;1]$ tel que f$(a) = f(a+1)$.

## Exercice 4 *D'après un devoir*

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = 1 + \frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}$. On désigne par $C_f$ sa courbe représentative de dans un RON.

**1**/**a**- Dresser le tableau de variation de *f*.

**b**- Etudier la position relative de $C_f$ par rapport à la tangente T à la courbe

à $C_f$ au point $A(0,2)$.

**2/a**- Montrer que l'équation $f(x) = 3x$ admet dans $[-1, +\infty[$ une solution unique $\alpha$ et que $\alpha \in ]0, 1[$.

**b**- Construire $T$ et $C_f$.

**3**/ Soit la suite $(u_n)$ la suite réelle définie par : $u_0 = \frac{\alpha}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}f(u_n)$.

**a**- Montrer que $\forall n \in IN;\ 0 \prec u_n \prec 1$.

**b**- Démontrer que $\forall x \in [0,1]$ on a $|f'(x)| \leqslant 2$,

en déduire que $\forall n \in IN;\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

**c**- Démontrer que $(u_n)$ est convergente et déterminer sa limite.

## Exercice 5

Soit $f : x \mapsto f(x) = \sqrt{x+1}$ ; $\forall x \in [1;+\infty[$.

Considérons $S_n = \sum_{k=1}^{n} f'(k)$ pour $n$ de $IN^*$.

**1**/ Soit $x \in [1;+\infty[$. Justifier que pour tout $t \in ]x;x+1[$, $f'(x+1) \leq f'(t) \leq f'(x)$

**2**/ En déduire que $\forall k \in IN^*;\ f'(k+1) \leq f(k+1) - f(k) \leq f'(k)$

**3**/ Prouver donc que $\forall n \in IN^*; f(n) - f(1) + f'(n) \leq S_n \leq f(n) - f(1) + f'(1)$

**4**/ Calculer enfin $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

## Exercice 6 *D'après un devoir*

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, on donne la courbe $C_f$ représentative d'une fonction définie, continue et dérivable sur $]-2;+\infty[$ et les asymptotes à d'équation x = -2 et y = x – 1.

1)a) Dresser le tableau des variations de f.

b) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - x + 3]$

2)a) Calculer $\lim\limits_{x\to-2^+} f \circ f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f \circ f(x)$.

b) Montrer que la fonction $f \circ f$ est strictement décroissante sur $]-2;-1]$.

c) Déterminer $f \circ f(]-2;-1])$

3) La courbe $C_f$ rencontre l'axe des abscisses, aux points d'abscisses $\alpha$ et $\beta$ avec $-2 \prec \beta \prec -1$ et $0 \prec \alpha \prec 1$.

a) Montrer que l'équation :$f(x) = \beta$ , n'admet aucune solution dans $]-2;+\infty[$ .

b) Construire et placer sur l'axe des abscisses, les solutions de l'équation $(f \circ f)(x) = 0$ sur $]-2;+\infty[$ .


NetSchool 1 KNOWLEDGE BASE

## Exercice 7

Soit la fonction $f$ définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+2x} - x$

**1/a**- Vérifier que pour tout $x \succ 0$; $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}$

**b**- Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

**2**/ Etudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat.

**3**/a- Vérifier que $\forall x \succ 0$; $f'(x) \succ 0$

**b**- Dresser le tableau de variation de $f$.

**c**- Tracer l'allure de $C_f$ la courbe de $f$.

**4**/ Soit $g$ :$[0; \frac{\pi}{2}[\to IR$; $x \mapsto g(x) = f\left[\frac{1}{\cos x}\right]$

**a**- Justifier la dérivabilité de $g$ sur $[0; \frac{\pi}{2}[$.

**b**- Déterminer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} g(x)$.

**c**- Dresser le tableau de variation de $g$.

## Exercice 8 *D'après un devoir*

## Exercice 9 *D'après un devoir*

A. On considère, dans $\mathbb{C}$, le polynôme suivant : $P(z) = 2z^3 - (1+5i)z^2 - (5-i)z + 2i$

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $2z^2 - (1+3i)z - 2 = 0$

2) Montrer que l'équation P(z)=0 admet, dans, une solution imaginaire que l'on précisera

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation P(z)=0

B. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A$ =1+i et $z_B = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1) Donner la forme trigonométrique de $z_A$ et celle de $z_B$.

2) Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $\mathcal{C}$ d'affixe $e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in [0; 2\pi]$.

On considère l'application f qui tout point M de $\mathcal{C}$ , associe f(M)=MA×MB

a) Montrer, pour tout $\alpha \in IR$, l'égalité suivante : $e^{i2\alpha} - 1$ =2i sin($\alpha$)$e^{i\alpha}$

b) Montrer l'égalité suivante :$f(M) = \left|e^{i2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)e^{i\alpha}\right|$

c) En déduire l'égalité suivante : f(M)=$\sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$

3) Montrer qu'il existe deux points M de $\mathcal{C}$ , dont on donnera les affixes, pour lesquels f(M) est minimal. Donner cette valeur minimale.

**Exercice 3** (7 Points)

Le plan complexe $P$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application $f$ de $P$ dans $P$ qui à tout point $M$ d'affixe $z$ on associe le point $M'$ d'affixe $z' = z^2 + iz$. Soit $I$ le point d'affixe $-\frac{i}{2}$.

1) Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

2) a) Déterminer l'affixe du point $J = f(I)$.

b) Montrer que pour tout $M \in P\setminus\{I\}$, on a $(\overrightarrow{u,JM'}) \equiv 2(\overrightarrow{u,IM})\ [2\pi]$.

c) En déduire l'ensemble $\Gamma$ des points M pour lesquels $M' \in [J,\vec{U})$.

3) On pose $z = x + iy$, $x$ et $y \in \mathbb{R}$ et $z' = x' + iy'$, $x'$ et $y' \in \mathbb{R}$.

a) Exprimer $x'$ et $y'$ en fonction de $x$ et $y$.

b) Tracer dans le plan $P$ la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 + \frac{1}{4}$ et la droite $\Delta : y = x$.

c) Donner à l'aide de $\mathscr{P}$ et $\Delta$ une construction géométrique du point $M'$ à partir d'un point $M$ de la droite $(I,\vec{u})$.

4) a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 2iz - 1 + e^{i2\theta} = 0$ où $\theta \in ]0,\pi[$.

b) On désigne par $A$, $B$ et $C$ les points d'affixes respectives $-i + ie^{i\theta}$, $-i - ie^{i\theta}$ et $-2i$. Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un rectangle. Déterminer la valeur de $\theta$ pour laquelle $OACB$ soit un carré.


NetSchool 1 KNOWLEDGE BASE