

L. B. Monastir		4^{ème} Math
P.P. : Ali Zouhaïer		
Chapitre : Complexes + simili. + Arith + L.E.I + Suite +conique +...		

Exercice -1- D'après un devoir

1/ Dans un magasin, le nombre annuel de ventes d'appareil électroménager, relevé pendant 6 années, est donné par le tableau suivant :

année	1996	1997	1998	1999	2000	2001
rang de l'année x	1	2	3	4	5	6
Nombre d'appareil y	623	712	785	860	964	1073

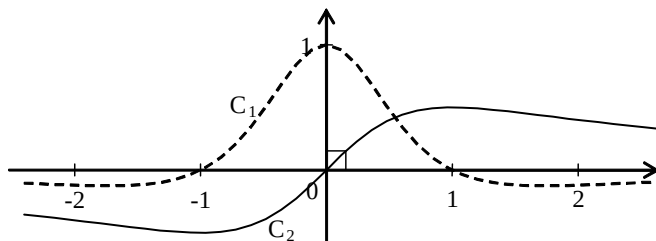
a- La covariance de (X, Y) est égale à ☐ a 255,75 ☐ b 256,75 ☐ c 257,75

b- Une estimation par la méthode de moindres carrées du nombre d'appareils vendus en 2005 est environ: ☐ a 1408 ☐ b 1050 ☐ c 1415

2/ Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0) = -1$ et $f(1)=1$

L'intégrale $I = \int_{-1}^0 f'(-x)dx =$ ☐ a -2 ☐ b 0 ☐ c 2

3/ Dans la figure ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f et celui de sa dérivée f' .



☐ La courbe de f est C_1 et C_2 de f' . ☐ La courbe de f' est C_1 et C_2 de f .

4/ A, B et C sont trois tels que $\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = AB \times AC$.

☐ A, B et C sont alignés ☐ ABC est un triangle équilatéral

☐ ABC est un triangle rectangle

Exercice -2- Bac 2009 session principale section Sc. exp

Répondre par Vrai ou Faux à chacune des propositions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

1) Toute suite croissante et bornée est convergente.

2) La suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = (-1)^n \sin(\frac{1}{n})$ n'admet pas de limite.

3) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $] -1, 1 [$ et telle que $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$.

L'équation $f(x) = 2009$ admet une solution unique dans l'intervalle $] -1, 1 [$.

4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x} - x^2) = -\infty$

5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Si pour tout $x \in [2, 3]$, $2 \leq f(x) \leq 3$ alors $2 \leq \int_2^3 f(x)dx \leq 3$.

6) Toute fonction f continue sur $[a, b]$ et telle que $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ est une fonction positive sur $[a, b]$.

Exercice -3-

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $2^{3n+2} + 3^n \equiv 0 \pmod{5}$
- 2) a) Déterminer suivants les valeurs de n le reste de 7^n modulo 10
 b) En déduire le chiffre des unités du nombre $7^{48} + 7^{50} + 7^{51}$
- 3) a) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ $4x \equiv 0 \pmod{6}$
 b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$ $n^3 \equiv n \pmod{6}$
 c) Déterminer alors les entiers n tels que $38n^3 + 2n \equiv 0 \pmod{6}$

Exercice -4-

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct R.

- 1/ Déterminer l'ensemble $(E) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- 2/ Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (E) , F le foyer de (E) d'abscisse positif et Δ la directrice associée à F .
 a- Déterminer le point I d'intersection de Δ et T la tangente à (E) en M .
 b- Montrer que FIM est un triangle rectangle.
 c- Déduire une construction simple de T .
- 3/ Soit S la similitude directe de centre $A'(-3)$ et qui transforme O en $B(2i)$
 a- Déterminer la transformée complexe associée à S .
 b- Soit $(E') = S((E))$. Montrer que (E') est une ellipse.
 c- Construire (E) et (E') .

Exercice -5- d'après un devoir

Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère

l'application
$$\begin{cases} f : P \rightarrow P \\ M(z) \mapsto M'(z') \text{ tel que: } z' = (-1+i)\bar{z} + 1 \end{cases}$$

1. Prouver que f est une similitude indirecte.
2. Donner les éléments caractéristiques de f .
3. On pose $B(1)$ et $C(i)$ et σ la similitude directe tel que $\sigma(O)=B$ et $\sigma(B)=C$.
 a- Déterminer l'application complexe associée à σ .
 b- Déterminer l'affixe du centre de σ .
- 4- on pose $\varphi = f \circ \sigma^{-1}$. Montrer que φ est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

Exercice -6- d'après un devoir

Dans le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère la droite D d'équation $x=1$, le plan $F(4,0)$ et un point variable $S(m+1; 0)$ avec $0 < m < 3$. (C_m) désigne la conique de foyer F , de directrice D et dont S est un sommet de l'axe focal.

- 1/a) Exprimer en fonction de m l'excentricité e de (C_m) .
 b) Déterminer en fonction de m la nature de (C_m) .

Pour la suite de l'exercice on suppose de $m=1$ et on note $(H) = (C_1)$.

- 2/a) Montrer que (H) est une hyperbole d'équation $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

b) Préciser les asymptotes de (H) puis tracer (H) .

- 3/ Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (H) non situé sur l'axe focal. La tangente T à (H) en un point coupe D en un point Q .

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FQ}$.

b) En déduire une construction géométrique de la tangente T à (H) en M de (H) .

Exercice -7- d'après un devoir

Dans le plan orienté on considère le carré direct AKJI de centre O et on désigne par C et B les symétriques de A respectivement par rapport à I et K.

1. faire la figure.

2. On pose : $f = h_{(A,2)} \circ t_{\overline{IA}}$.

Déterminer $f(C)$ puis caractériser f .

3. Soit g la similitude indirecte qui transforme A en I et B en J.

a- Déterminer les images par g des droites : (KJ) et (BJ).

b- En déduire que $g(J)=O$.

4.a- Montrer que g admet un centre qu'on notera Ω .

b- Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés : (O,4) et (B,-1) puis construire Ω .

5. On désigne par Δ la médiatrice de [AI], on pose : $\psi = h_{(A,-2)} \circ S_{\Delta}$.

a- Montrer que $\psi = f \circ S_{(AI)}$

b- Donner la nature et les éléments caractéristiques de ψ .

Exercice -8- bac Tn 2005

1) Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x^3 e^{1-x^2}$

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

a- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

b- Dresser le tableau de variation de f .

c- Construire la courbe $\mathcal{C}$.

2) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_0^1 x^n e^{1-x^2} dx$.

a- Calculer u_1 .

b- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{e}{n+1}$.

En déduire que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3)a- Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout

n de $\mathbb{N}^*$ on a : $u_{n+2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)u_n - \frac{1}{2}$.

b- En déduire l'aire du domaine limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$.

Exercice -9- bac 1998 Tn s. controle

1)a- On lance un dé truqué dont les faces sont respectivement numérotées de 1 à 6. Sachant que la probabilité d'apparition du numéro 6 est $\frac{1}{3}$

et que les autres numéros ont la même probabilité d'apparition, calculer la probabilité d'apparition pour chacun des numéros de 1 à 5

b- On lance aussi une pièce de monnaie truquée. Sachant que la probabilité d'apparition de la face "Pile" est $\frac{2}{5}$, calculer la probabilité d'apparition de l'autre face.

2) On lance simultanément le dé et la pièce de monnaie et on désigne par

X l'aléa numérique défini comme suit :

- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro impair du dé alors $X = 0$.
- Si la face " Pile " apparaît en même temps qu'un numéro pair du dé alors $X = 1$.
- Si la face " Face " apparaît alors X prend pour valeur le numéro apparu sur le dé.

Déterminer la loi de probabilité de X .

3) On répète l'épreuve précédente trois fois de suite et on désigne par

Y le nombre de fois où l'on obtient $X \geq 5$.

a- Calculer $P(Y = 2)$.

b- Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que sa variance.

Exercice -10- (4 points)

Une entreprise fabrique des calculatrices. Un contrôle de qualité a montré que chaque calculatrice fabriquée par cette entreprise pouvait présenter deux types de défauts indépendants a et b.

Une calculatrice est dite défectueuse si elle présente au moins l'un des deux défauts. On considère les deux événements suivants:

A:« une calculatrice fabriquée présente le défaut a»

B:« une calculatrice fabriquée présente le défaut b»

D:« une calculatrice fabriquée est défectueuse »

On suppose que les probabilités de A et B sont : $p(A) = 0,01$ et $p(B) = 0,03$.

1/a- Calculer $p(A \cap B)$.

b- Prouver que $p(D) = 0,0397$.

2/ Un commerçant passe une commande de 10 calculatrices.

Calculer la probabilité p_1 que trois calculatrices dans cette commande soient défectueuses.

3/ Un commerçant exige que sur une commande d'un nombre n de calculatrices, la probabilité d'avoir au plus $(n - 1)$ calculatrices défectueuses reste inférieure à 0,1. Déterminer le nombre maximum de calculatrice que le commerçant peut commander.

4/ On admet que la durée de vie T en année d'une calculatrice de cette entreprise suit une loi exponentielle de paramètre λ .

a- Déterminer, à 10^{-2} près, la valeur de λ sachant que $p(T \geq 10) = 0,7$.

b- Calculer la probabilité qu'une calculatrice de cette entreprise dure entre 6 mois et 7 ans.

c- Tu as trouvé une calculatrice de cette entreprise **déjà utilisée**.

Quelle est la probabilité qu'elle reste encore en marche au plus 1 an?

Exercice 11 (8,5 points)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto \ln(e^x + 1)$. C_f est la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (unité graphique 2 cm).

I/ 1/a- Prouver que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à C_f .

b- Etudier la position relative de C_f et Δ .

2/ Dresser le tableau de variation de f puis tracer C_f .

II/ Soit g la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = f(x) - x; \forall x \in \mathbb{R}$

1/ Préciser le sens de variation de g .

2/a- Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+; \ln(1+t) \leq t$.

b- Dédire que $\forall x \in \mathbb{R}; g(x) \leq e^{-x}$.

III/ Soient les suites (u_n) et (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \int_n^{n+1} g(x)dx$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

1/a- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; g(n+1) \leq u_n \leq g(n)$

b- Conclure que (u_n) est décroissante.

2/a- A l'aide de II/2/ montrer que $\forall n \in \mathbb{N}; 0 \leq u_n \leq e^{-n} - e^{-n-1}$.

b- Dédire que (u_n) converge et préciser sa limite

3/a- Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}; S_n = \int_0^{n+1} (f(x) - x)dx$; donner donc une interprétation géométrique de S_n .

b- Etudier la monotonie de (S_n) .

c- Montrer que (S_n) est convergente (on pourra profiter de II/2/).

Exercice -12- Bac

1/ Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : y'' + y = 0$

2/ Soit l'équation différentielle $(E_2) : y'' + \frac{1}{x^4}y = 0$.

a- Soient f et g deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que $f(x) = xg\left(\frac{1}{x}\right)$.

Montrer que f est solution de (E_1) si et seulement si g est solution de (E_2) .

b- En déduire les solutions de (E_2) .

3/ Calculer alors l'intégrale $I = \int \frac{1}{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{x^3} \sin \frac{1}{x} dx$.

Exercice -13- Bac Liban 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} x_0 = 3; x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1; y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

1/ Démontrer par récurrence sur n , que $x_n = 2^{n+1} + 1$

2/a- Calculer $x_8 \wedge x_9$, puis $x_{2002} \wedge x_{2003}$.. Que peut-on en déduire pour ces couples de nombres ?

b- x_n et x_{n+1} sont ils premiers entre eux pour tout entier n ?

3/a- Démontrer que pour tout n , $2x_n - y_n = 5$. En déduire y_n en fonction de n .

b- Etudier, suivant les valeurs de l'entier p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

c- On pose $d_n = x_n \wedge y_n$; démontrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$. En déduire l'ensemble des entiers n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

Exercice -14- §§§§§§§§§§ §§§§§§§§§§

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(2, 1, -1)$ et $B(5, 1, -4)$ et les droites Δ et D définies par :

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 1 \\ z = -1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } D : \begin{cases} x = -3 + 2\beta \\ y = -\beta \\ z = 2 + \beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}.$$

1/a- Vérifier que $\Delta = (AB)$.

b- Donner deux points distincts E et F de D .

c- Prouver que Δ et D ne sont pas coplanaires.

2/ Soit Q un plan contenant Δ et parallèle à D .

a- Prouver que $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{EF}$ est un vecteur normal à Q .

b- Donner alors une équation cartésienne de Q .

3/ Soit $(P) : -3x + y + 7z + 1 = 0$. Vérifier que P est parallèle à Q .

4/ On note S_A la sphère de centre A et de rayon $r_A = \sqrt{29}$ et S_E la sphère de centre E et de rayon r .

a- Montrer que S_A est tangente à D .

b- Déterminer r de façon que S_E soit tangente à Δ .

c- Montrer que $S_A \cap P$ est un cercle dont on précisera le rayon r' .

Exercice -15-

Dans l'espace E muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,

on considère le plan $P : x + 2y - z - 4 = 0$ et l'ensemble

$$S = \{M(x, y, z) \in E / 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8x - 4y - 8z + 6 = 0\}.$$

1/ Montrer que S est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon r .

2/ Vérifier que $H(-1, 3, 1)$ est un point commun de S et P .

3/ Déterminer la position relative de S et P .

4/ Soit Δ la droite passant par le point $A(1, 0, 0)$ et dirigée par le vecteur

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + a\vec{k} \text{ avec } a \text{ un réel.}$$

a- Déterminer la valeur de a sachant que Δ est parallèle à P . On prendra la valeur trouvée pour le reste de l'exercice.

b- Soit C un point de la droite d'intersection de P et le plan perpendiculaire à P contenant Δ . Soit B un point de Δ tel que aire de ABC est égal à 2009. Calculer AB .

5/a- Soit S' l'image de S par la translation T de vecteur $\vec{u}$. Déterminer une équation cartésienne de S' .

b- Montrer que S' est une sphère tangente à P et préciser le point H' de contact de S' et P .

Exercice -16-

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $R=(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ Soit l'ensemble $(E) : y^2 = \frac{9}{4}(4 - x^2)$

a- Déterminer la nature de (E) .

b- Préciser les sommets de (E) puis le construire dans R .

2/ Soit $G : [0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto G(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2} dt$.

a- Calculer $G\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et montrer que $\forall x \in [0; \pi]; G'(x) = -4\sin^2 x$

b- En déduire l'expression de $G(x)$ en fonction de x .

3/a- Hachurer sur votre figure la partie (D) du plan limitée par (E) et les

demi droites d'équation respectives $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$

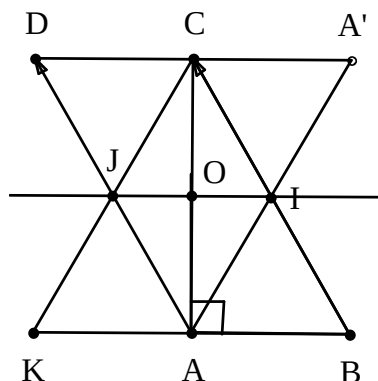
b- A l'aide de G calculer $\mathcal{A}(D)$ l'aire de D .

Exercice -17- (4,5 points)

Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A et tel

que $\widehat{(\vec{BC}; \vec{BA})} = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Soit D le point du plan tel que $\vec{AD} = \vec{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A . On désigne par O, I et J les milieux



respectifs des segments $[AC]$, $[BC]$ et $[AD]$.

1) Soit s la similitude directe du plan telle que $s(J)=B$ et $s(D)=K$.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$. (0,5)

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilatéral). (0,75)

c) Montrer que C est le centre de la similitude s . (0,5)

2) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidépacement du plan qui transforme D en A et A en A' .

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques . (0,75)

b) Montrer que $f(K)=C$. (0,5)

3/a) Montrer que $g=f \circ s$ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport . On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre . (0,5)

b) Caractériser l'application $g \circ g$. (0,25)

c) Montrer alors que $\vec{\Omega B} = 4 \vec{\Omega D}$ (0,5)

d) Enfin caractériser géométriquement l'axe Δ de g . (0,25)