

Exercice n°1

Soit $\theta \in]0, \pi[$; on pose : $t = e^{2i\theta}$; $u = t^3 - 1$; $v = t - 1$ et $w = 1 + t + t^2$

- 1) montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; 1 - e^{ix} = -2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}$
- 2) montrer que : $v \neq 0$ et $w = \frac{u}{v}$ et déduire que $w = (1 + 2 \cos 2\theta) e^{2i\theta}$
Déterminer θ pour que w soit imaginaire pur
- 3) Soit A, M et N les points du plan d'affixes respectives $1, t$ et t^3
 - a) Pour quelles valeurs de θ les points A, M et N sont alignés
 - b) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est isocèle et rectangle en A
- 4) Montrer que le triangle AMN est équilatéral $\Leftrightarrow |w| = 1$ et $|t + 1| = 1$

Exercice n°2

Soit ABC un triangle tel que $AB = 2AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Voir annexe 2 On

pose I le milieu du segment $[AB]$. On note D le point tel que : $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$. On considère la

similitude indirecte S telle que $S(A) = B$ et $S(C) = A$

- 1) Déterminer le rapport de S
- 2) Soit Ω le centre de S , montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à D
- 3) Construire $D' = S(D)$
- 4) Soit Δ la médiatrice de $[AD]$, vérifier que $\Omega \in \Delta$ et que Δ est l'axe de S
- 5) On rapporte le plan au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$
 - a) Déterminer l'écriture complexe de S
 - b) En déduire l'affixe de Ω et une équation de Δ

Exercice n°3

- 1) On considère l'équation $(E): 11x - 7y = 5$ ou x et y de $\mathbb{Z}$
 - a) justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u, v) tels que $11u - 7v = 1$. Trouver un tel couple
 - b) en déduire une solution particulière de l'équation (E)
 - c) résoudre l'équation (E)
 - d) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la droite Δ d'équation $11x - 7y = 5$. On note ζ l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels

que $0 \leq x \leq 50$ et $0 \leq y \leq 50$. déterminer le nombre de points de la droite Δ appartenant à l'ensemble ζ et dont les coordonnées sont des nombres entiers.

2) On considère l'équation $(F): 11x^2 - 7y^2 = 5$ ou x et y de $\mathbb{Z}$

a) Démontrer que si le couple (x, y) solution de (F) alors $x^2 \equiv 2y^2 \pmod{5}$

b) Soient x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

Modulo 5, x est congru à	0	1	2	3
Modulo 5, x^2 est congru à				

Modulo 5, y est congru à	0	1	2	3
Modulo 5, y^2 est congru à				

Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division euclidienne de x^2 et de $5y^2$ par 5 ?

c) En déduire que si le couple (x, y) est solution de (F) , alors x et y sont des multiples de 5.

3) Démontrer que si x et y sont des multiples de 5, alors le couple (x, y) n'est pas solution de (F) . Que peut-on déduire pour l'équation (F) .

Exercice n°4

On considère les équations différentielles $(E_0): 2y' - y = 0$ et $(E_1): 2y' - y = e^{\frac{x}{2}}$

1) a) résoudre l'équation différentielle (E_0)

b) Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}}$ est une solution de (E_1)

c) Montrer qu'une fonction f est une solution de (E_1) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0)

d) En déduire les solutions de (E_1)

2) Déterminer la solution f de (E_1) tel que $f(0) = \frac{1}{2}$

3) Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{\frac{x}{2}}$

a) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

b) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit V le volume de solide engendré par la rotation de l'arc $C = \{M(x, y) \text{ tels que } -1 \leq x \leq 0 \text{ et } 0 \leq y \leq f(x)\}$ autour de l'axe des abscisses. Calculer V