Cours Chapitre 1 : Nombres complexes

Forme cartésienne (algébrique) :

Définition :

La forme algébrique d'un nombre complexe $z\epsilon\mathbb{C}$ est : $\boldsymbol{z = a + ib}$ avec a et b sont deux réels et $i^2 = -1$.

a est la partie réelle de z, notée $Re(z)$, et b est la partie imaginaire de z, notée $Im(z)$.

Les réels sont les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle : $Im(z) = 0$.

Les imaginaires purs sont les nombres complexes dont la partie réelle est nulle : $Re(z) = 0$.

Deux nombres complexes z et z' sont égaux , si et seulement si, $Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$. En particulier $z = 0$, si et seulement si , $Re(z) = 0$ et $Im(z) = 0$.

Opération dans $\mathbb{C}$:

- ***Addition des complexes :*** Pour tous réels : a, b, a' et b'

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b').$$

- ***Multiplication des complexes :*** Pour tous réels a, b, a' et b' ,

$$(a + ib) \times (a' + ib') = (aa' - bb') + i(ab' + ba').$$

- ***Inverse d'un complexe non nul :*** Pour tous réels a et b tels que $\boldsymbol{a^2 + b^2 \neq 0}$,

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Conjugué d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b)\epsilon\mathbb{R}^2$.

On appelle conjugué de z le nombre complexe $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib = Re(z) - i\, Im(z)}$

$\frac{z+\bar{z}}{2} = Re(z) = a$, $\frac{z-\bar{z}}{2i} = Im(z) = b$, $z * \bar{z} = Re(z)^2 + Im(z)^2 = a^2 + b^2$

z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$, z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.

$\bar{\bar{z}} = z$

Pour tous nombres complexes z et z': $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z * z'} = \bar{z} * \bar{z'}$

Pour tous nombres complexes z et z' et $n\epsilon\mathbb{N}$: $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

Pour tout nombre complexe non nul z' : $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z'}}$; $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$

Module d'un nombre complexe :

Soit z un nombre complexe. On pose $z = a + ib$ avec $(a, b)\epsilon\mathbb{R}^2$.

On appelle module de z le réel positif noté $|\boldsymbol{z}| = \sqrt{\boldsymbol{a^2} + \boldsymbol{b}^2} = \sqrt{\boldsymbol{Re(z)^2} + \boldsymbol{Im(z)^2}} = \sqrt{\boldsymbol{z} * \overline{\boldsymbol{z}}}$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' et $n\epsilon\mathbb{N}$:

$z * \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$

$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$; $|kz| = |k| * |z|$ avec k$k\epsilon\mathbb{Z}^*$.

$|z * z'| = |z| * |z'|$; $|z^n| = |z|^n$

$|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $Re(z) \leq |z|$; $Im(z) \leq |z|$.

Pour tout nombre complexe non nul z' : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{z'}$; $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$; $\frac{1}{z'} = \frac{\overline{z'}}{|z|^2}$

Représentation graphique d'un nombre complexe :

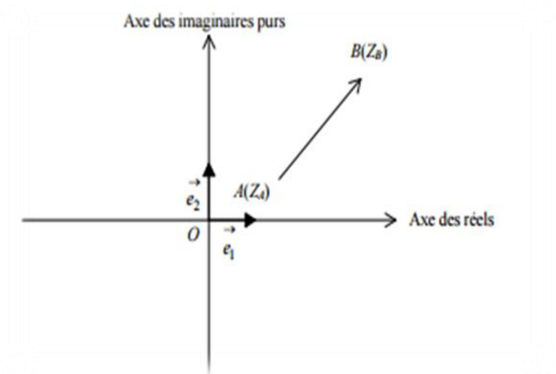
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$ est associé l'unique point $M\ (a, b)$. On dit alors que z est l'affixe de M. on note z_M .

$(o, \overrightarrow{e_1})$ est l'axe réel, $(o, \overrightarrow{e_2})$ est l'axe imaginaire.

$|z| = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

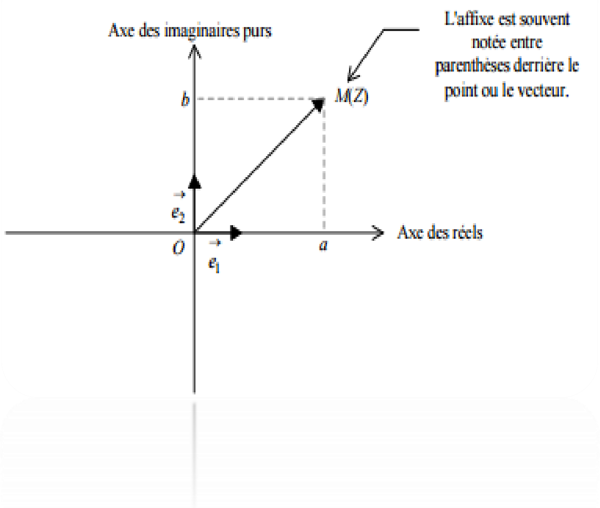
Les points d'affixes z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Soient A d'affixe z_A et B d'affixe z_B on a :
$Aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
et $AB = |z_B - z_A|$

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteur du plan complexe et α, β deux réels on a :

$Aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\ Aff(\vec{u}) + \beta\ Aff(\vec{v})$

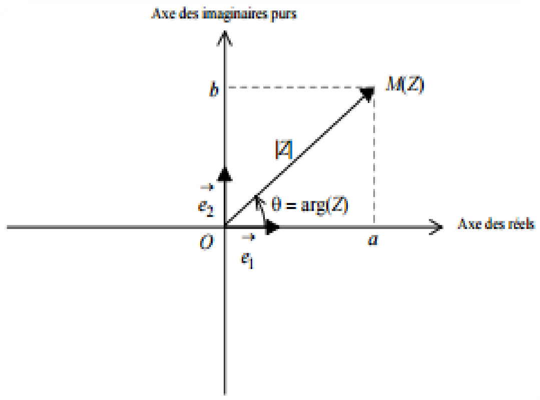


Forme trigonométrique:

Argument d'un nombre complexe non nul :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Soit M un point du plan complexe d'affixe z non nul. Une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right) = \theta$ est dite un argument de z noté $arg\ z$ et on écrit $arg\ z \equiv \theta\ [2\pi]$.



$\boldsymbol{z = |z|\ (cos\theta + isin\theta)}$ est dite <u>forme trigonométrique</u> du nombre complexe z.

$Re(z) = r\ cos\theta$ et $Im(z) = r\ sin\theta$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

⇨ $cos\theta = \frac{a}{r}$ et $sin\theta = \frac{b}{r}$

$z\epsilon\mathbb{R}^* \iff \arg z \equiv 0\ [\pi]$

$z\epsilon\mathbb{R}_+^* \iff \arg z \equiv 0\ [2\pi]$

$z\epsilon\mathbb{R}_-^* \iff \arg z \equiv \pi\ [2\pi]$

z est imaginaire signifie $arg\ z \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$.

Propriétés:

Pour tous z et z' complexes non nul et $n\epsilon\mathbb{N}$:

$\arg \bar{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$; $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$; $\arg(kz) \equiv \arg(z)[2\pi]$ si $k\epsilon\mathbb{Z}_+^*$

$\arg(kz) \equiv \arg(z) + \pi[2\pi]$ si $k\epsilon\mathbb{Z}_-^*$; $\arg(z * z') = \arg(z) + \arg(z')$;

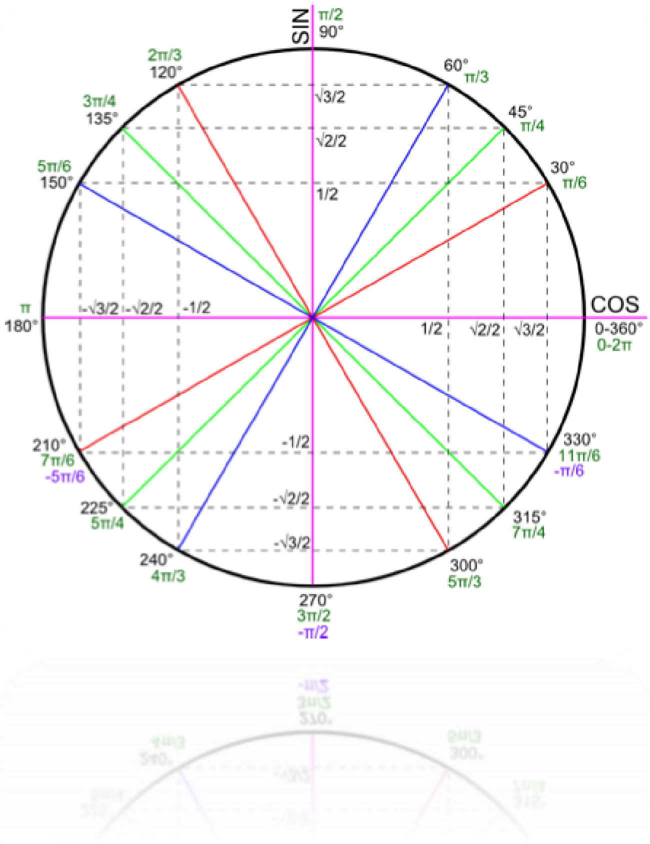
$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z')[2\pi]$; $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$; $\arg(z^n) = n\ arg(z)[2\pi]$.

$z = z'$ équivaut $\begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg z = \arg(z')\ [2\pi] \end{cases}$

Cercle trigonométrique:

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\boldsymbol{cos\theta}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\boldsymbol{sin\theta}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

On appelle cercle trigonométrique, un cercle orienté de rayon 1. Par convention, on choisit le sens inverse des aiguilles d'une montre comme sens direct ou sens positif.



Forme exponentielle :

Soient $z \epsilon\ \mathbb{C}^*$et $\arg z\ \equiv \theta[2\pi]$.

L'écriture $\boldsymbol{z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}}$ est appelée <u>forme exponentielle</u> du nombre complexe z.

$e^{i\theta}$ $=cos\theta + i\ sin\theta$; $\ e^{-i\theta} = cos\theta - i\ sin\theta.$

$cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ (les formules d'Euler).

Propriétés :

Pour tous θ et θ' réels , k et n entiers on a :

$e^{i0} = 1;\ \ e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$; $e^{i\pi} = -1$

$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+\pi)} = -e^{i\theta}$; $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$

$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$; $e^{-i\theta'} = \dfrac{1}{e^{i\theta'}}$; $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ => $(cos\theta + isin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$: formule de Moivre.

Vision géométrique : (alignement , orthogonalité)

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. On a :

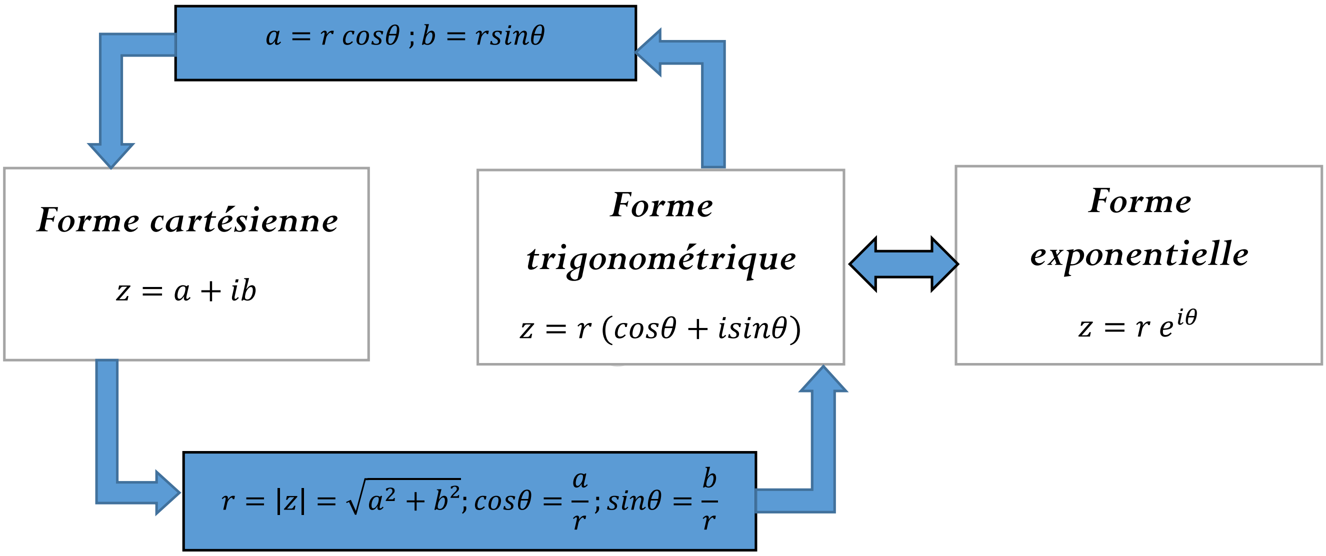
$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\widehat{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ deux vecteurs non nuls sont colinéaires $\Leftrightarrow$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un réel.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ est un imaginaire pur.

Résumé:



Pour aller plus loin: Pour trouver les ensembles cherchés :

- $MA = MB \leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice de $[AB]$.
- $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv 0[\pi] \leftrightarrow M$ appartient à la droite (AB) privé de A et B.
- $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \pi[2\pi] \leftrightarrow M \epsilon]AB[$.
- $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \leftrightarrow M$ appartient au cercle de diamètre [AB] privé de A et B.