République Tunisienne Ministère de l'éducation ◈◈◈	Résumé : *Produit scalaire, produit vectoriel et produit mixte*
Année scolaire : *2016/2017*	Niveau : *Bac sciences techniques*

Définition : *"Produit scalaire"*

Soit A, B et C trois points de l'espace.

Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par :

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$ où $\|\overrightarrow{AB}\|$ désigne la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Théorème :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace sont orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Théorème : *"Expression analytique du produit scalaire"*

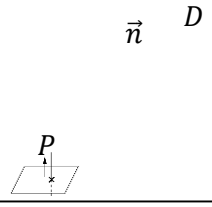
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un RON de l'espace ξ.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

En particulier : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Définition : *"Vecteurs normal à un plan"*

Un vecteur normal $\vec{n}$ à un plan P est un vecteur directeur d'une droite D quelconque perpendiculaire à ce plan.



Théorème :

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul et A un point de l'espace.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Théorème :

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan avec $(a, b, c) \neq (0,0,0)$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur noarmal à P.

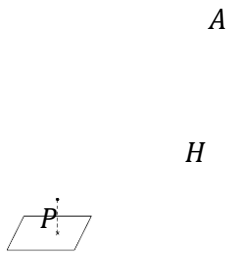
Théorème : *"Distance d'un point à un plan"*

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $P: ax + by + cz + d = 0$ un plan, $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur P.

La distance de A à P est le réel positif AH noté $d(A, P)$ et tel que :

$$AH = d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Théorème :

Soit P et Q deux plans de vecteurs normaux respectifs $\vec{n}$ et $\vec{m}$, D et D' deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

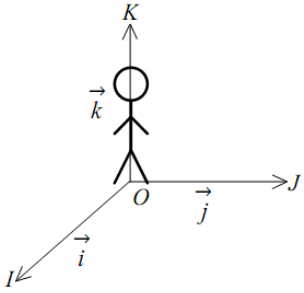
$P//Q \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{m}$ sont colinéaires 	$D//D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires 	$D \perp P \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires 
$P \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{m}$ 	$D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ 	$D//P \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{u}$ 

Définition : *"Orientation de l'espace"*

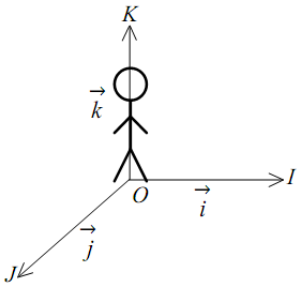
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace.

Soit un observateur se tenant debout, dans l'axe $(O, \vec{k})$, les pieds en O et regardant le point I. Si l'observateur a le point J à sa gauche, le repère est dit direct. Il est dit indirect dans le cas contraire.

Repère direct



Repère indirect

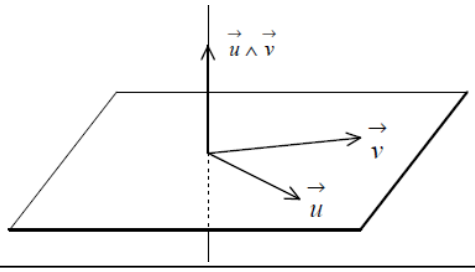


Définition : *"Produit vectoriel"*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vrctoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'unique vecteur noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Si non, alors :

$$\begin{cases} \vec{u} \wedge \vec{v} \text{ est orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v} \\ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v}) \text{ est une base directe} \\ \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \end{cases}$$



Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'epace et tous réels α et β :

- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
- $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) \wedge \vec{u} = \vec{v} \wedge \vec{u} + \vec{w} \wedge \vec{u}$
- $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \wedge (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace.

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs directeurs d'un plan P, alors le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal à P.

Théorème : *"Expression analytique du produit vectoriel"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un ROND de l'espace.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$, on a : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix}y & y'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\imath}-\begin{vmatrix}x & x'\\ z & z'\end{vmatrix}\vec{\jmath}+\begin{vmatrix}x & x'\\ y & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

Théorème : *"Cosinus et sinus de l'angle de deux vecteurs"*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté. Alors :

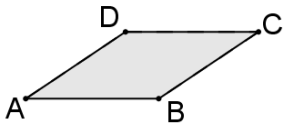
$$\cos(\widehat{\vec{u},\vec{v}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad |\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|=\frac{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$$

Théorème : *"Aire d'un parallélogramme – Aire d'un triangle"*

Soit $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ un RON de l'espace et $ABCD$ un parallélogramme.

L'aire du parallélogramme $ABCD$ est égale à : $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$

En particulier, l'aire du triangle ABD est égale à : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|$



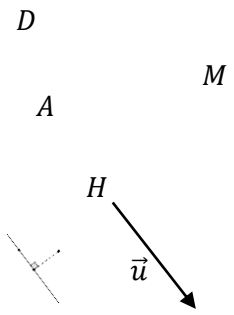
Théorème : *"Distance d'un point à une droite"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $D(A,\vec{u})$ une droite, M un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur $D(A,\vec{u})$.

La distance de M à $D(A,\vec{u})$ est le réel positif MH noté $d(M,D)$ et tel que :

$$MH=d(M,D)=\frac{\|\overrightarrow{AM}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



Définition : *"Produit mixte"*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'epace.

On appelle produit mixte des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ le réel : $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$

Propriétés :

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

1) $(\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=\begin{vmatrix}a & a' & a''\\ b & b' & b''\\ c & c' & c''\end{vmatrix}$

2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=0$

Propriété :

Soit $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ une base orthonormée.

1) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est directe $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=1$

2) $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est indirecte $\Leftrightarrow (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}=-1$

Théorème : *"Volume d'un parallélépipède"*

L'espace est muni d'un ROND $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $ABCDEFGH$ un parallélipipède et V son volume. Alors :

$$V = aire\ de\ la\ base \times hauteur$$
$$= \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right| = \left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)\right|$$

Théorème : *"Volume d'un tétraèdre"*

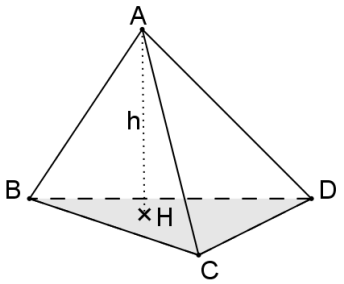
L'espace est muni d'un ROND $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $ABCD$ un tétraèdre, V son volume et h la hauteur issue de A.

Alors :

1) $V = \frac{1}{3} aire\ de\ la\ base \times hauteur$
$$= \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right| = \frac{1}{6}\left|det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)\right|$$

2) $h = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|}$



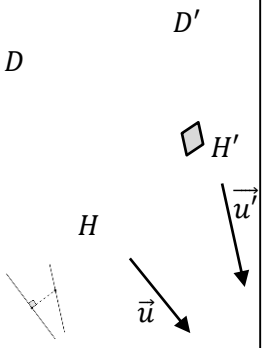
Théorème : *"Distance de deux droites"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit $D(A,\vec{u})$ et $D'(A',\vec{u'})$ deux droites non coplanaires, H et H' les intersections de D et D' avec leur perpendiculaire commune.

La distance de $D(A,\vec{u})$ à $D'(A',\vec{u'})$ est le réel positif HH' noté $d(D,D')$ et tel que :

$$d(D,D') = HH' = \frac{\left|\left(\vec{u}\wedge\vec{u'}\right)\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\left\|\vec{u}\wedge\vec{u'}\right\|}$$

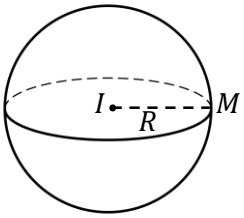


Définition : *"Sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Soit I un point de l'espace et R un réel strictement positif.

On appelle sphère de centre I et de rayon R, l'ensemble des points M de l'espace tels que $IM = R$. On la note : $S(I,R)$.



Conséquence : *"Equation cartésienne d'une sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $I(a, b, c)$ un point de l'espace et R un réel strictement positif.

Une équation cartésienne de la sphère $S(I, R)$ est :

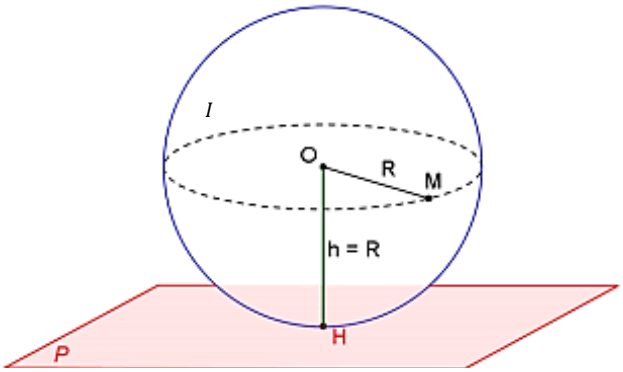
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-b)^2 = R^2$$

Théorème : *"Section plane d'une sphère"*

L'espace est muni d'un RON $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit $S(O, R)$ une sphère de centre O et de rayon R. Soit P un plan, H le projeté orthogonal de O sur P. Posons h la distance de O à P $(h = OH)$.

1) Si $h > R$, alors $S \cap P = \emptyset$. Donc S et P sont disjoints.
2) Si $h = R$, alors $S \cap P = \{H\}$. Donc S et P sont tangents en H.



3) Si $h < R$, alors $S \cap P =$ le cercle du plan P de centre H et de rayon $r = \sqrt{R^2 - h^2}$.