Résumé : *Nombres complexes*

Niveau : *Bac sciences techniques*

Définition :

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- L'addition et la multiplication des nombres réels se prolongent aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $\boldsymbol{i^2 = -1}$.
- Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique : $z = a + ib$ avec a et b sont des réels.

L'écriture $z = a + ib$ avec a et b réels est appelée **forme algébrique** ou **forme cartésienne** du nombre complexe z. a est **la partie réelle** de z, notée $\boldsymbol{Re(z)}$. b est **la partie imaginaire** de z notée $\boldsymbol{Im(z)}$.

Remarque :

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

- Si $b = 0$, z est réel.

- Si $a = 0$, z est dit **imaginaire pur**.

Conséquences :

Soit z et z' deux nombres complexes.

- z est réel ssi $Im(z) = 0$.
- z est imaginaire pur ssi $Re(z) = 0$.
- $z = 0$ ssi $Im(z) = Re(z) = 0$.
- $z = z' \Leftrightarrow Re(z) = Re(z')$ et $Im(z) = Im(z')$.

Définition :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit $M(a, b)$ un point du plan.

- On appelle **affixe** de M, le nombre complexe noté $aff(M)$ ou z_M tel que : $aff(M) = a + ib$. Le nombre complexe $a + ib$ est dit aussi l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$, on le note $aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$ ou $z_{\overrightarrow{OM}}$.
- $M(a, b)$ est le **point image** du nombre complexe $z = a + ib$.

Propriétés :

A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs.

1) $aff(\overrightarrow{AB}) = z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

2) $aff(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha\ aff(\vec{u}) + \beta\ aff(\vec{v})$ pour tous réels α et β.

Définition : *"Conjugué d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$, le nombre complexe défini par $\boldsymbol{\bar{z} = a - ib}$.

Propriétés :

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

1) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$
2) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \overline{z'}$
3) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
4) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$, $z' \neq 0$
5) $z + \bar{z} = 2a$
6) $z - \bar{z} = 2ib$
7) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

Théorème :

Soit z un nombre complexe.

- z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$
- z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Définition : *"Module d'un nombre complexe"*

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe donné sous forme cartésienne.

On appelle **module** de z et on note $|z|$, le réel positif défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
2) $|\bar{z}| = |z|$
3) $|-z| = |z|$
4) $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$
5) $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$, $z' \neq 0$
6) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

Propriété :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

Alors : $AB = |z_B - z_A|$

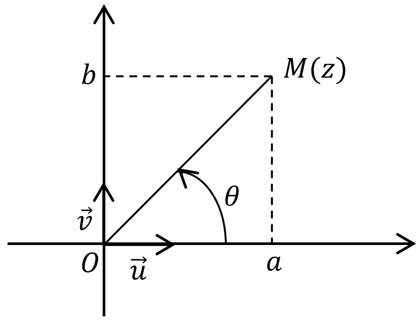
Définition : *"Argument d'un nombre complexe"*

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$z = a + ib$ (a et b sont des réels) est un nombre complexe non nul d'mage M.

On appelle **argument** de z et on note $arg(z)$, toute mesure, en radian, de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

$arg(z) = \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) + 2k\pi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$



Propriétés :

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls.

1) $arg(\bar{z}) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
2) $arg(-z) = arg(z) + \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
3) $arg(z \cdot z') = arg(z) + arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
4) $arg(z^n) = n \cdot arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$
5) $arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
6) $arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg(z) - arg(z') + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Théorème :

Soit z un nombre complexe non nul d'écriture algébrique $z = a + ib$ et θ un argument de z. Alors : $\boldsymbol{a = |z| \cos\theta}$ et $\boldsymbol{b = |z| \sin\theta}$ ou encore : $\boldsymbol{\cos\theta = \frac{a}{|z|}}$ et $\boldsymbol{\sin\theta = \frac{b}{|z|}}$

On a alors : $\boldsymbol{z = |z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)}$

Définition : *"Forme trigonométrique d'un nombre complexe"*

Soit z un nombre complexe non nul.

L'écriture de z sous la forme $|z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta)$ ou $[|z|, \theta]$ où θ désigne un argument de z est appelée **écriture trigonométrique** ou **forme trigonométrique** de z.

$$\boldsymbol{z = |z|(cos\,\theta + i\,sin\,\theta) = [|z|, \theta]}$$

$|z|$ et θ sont les **coordonnées polaires** du point $M(z)$.

Propriétés :

Soient $z = [r, \theta]$ et $z' = [r', \theta']$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1) $\bar{z} = [r, -\theta]$
2) $z \cdot z' = [r \cdot r', \theta + \theta']$
3) $z^n = [r^n, n\theta]$
4) $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
5) $\frac{z}{z'} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$

Définition : *"Forme exponentielle d'un nombre complexe"*

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $\boldsymbol{\cos\theta + i\ \sin\theta = e^{i\theta}}$.

Soit $z = [r, \theta]$ un nombre complexe non nul. L'écriture $\boldsymbol{z = re^{i\theta}}$ est **la forme exponentielle** de z.

Propriétés :

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux nombres complexes non nuls avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $r' \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $\theta' \in \mathbb{R}$.

1) $\bar{z} = re^{-i\theta}$
2) $z \cdot z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
3) $z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{Z}$
4) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
5) $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ on a : $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta}$ et $\boldsymbol{\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta}$

Formule de Moivre :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a : $\boldsymbol{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$

Propriétés :

Le plan est muni d'un ROND $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs d'affixes respectives $z_{\vec{u}}$ et $z_{\vec{v}}$.

1) $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

   En particulier, si A, B, C et D sont quatre d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D, alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}}\right) = arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est réel.

3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \frac{z_{\vec{u}}}{z_{\vec{v}}}$ est imaginaire pur.

Définition : *"Racine carrée d'un nombre complexe"*

Soit Z un nombre complexe.

On appelle **racine carrée** de Z tout nombre complexe z vérifiant : $z^2 = Z$.

Théorème :

$Z = a + ib$ et $z = x + iy$ sont deux nombres complexes donnés sous forme cartésienne.

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$$

Remarques :

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.
- Il est interdit d'utiliser la notation $\sqrt{\ }$ pour exprimer une racine carrée d'un nombre complexe, car il ne s'agit pas d'une fonction sur $\mathbb{C}$.

Théorème :

Soit $\boldsymbol{Z = re^{i\theta}}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

Les racines carrées de Z sont : $\boldsymbol{z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}$ et $\boldsymbol{z_2 = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}}$

Définition : *"Equation du second degré à coefficients complexes"*

Soient a, b et c trois nombres complexes donnés tels que $a \neq 0$.

L'équation : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ s'appelle équation du second degré à coefficients complexes.

Théorème :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose $\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}$. Appelé le discriminant de l'équation (E).

1) Si $\Delta = \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $\boldsymbol{z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}}$
2) Si $\Delta \neq \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes :

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}} \text{ et } \boldsymbol{z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}} \quad \text{avec } \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

3) Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$

Théorème :

Soit $(\boldsymbol{E})$: $\boldsymbol{az^2 + 2b'z + c = 0}$ une équation du second degré à coefficients complexes.

On pose $\Delta' = \boldsymbol{b'^2 - ac}$. Appelé le discriminant réduit de l'équation (E).

1) Si $\Delta' = \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ une solution double : $\boldsymbol{z_1 = z_2 = \frac{-b'}{a}}$
2) Si $\Delta' \neq \boldsymbol{0}$, alors (E) admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes :

$$\boldsymbol{z_1 = \frac{-b'-\delta'}{a}} \text{ et } \boldsymbol{z_2 = \frac{-b'+\delta'}{a}} \quad \text{avec } \delta' \text{ est une racine carrée de } \Delta'.$$

3) Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)}$

Théorème :

Soit (E): $az^2 + bz + c = 0$ une équation du second degré à coefficients complexes.

Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors : $\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

<u>Théorème</u> :

Soient S et P deux nombres complexes donnés.

Les nombres complexes z_1 et z_2 tels que : $\begin{cases} \boldsymbol{z_1+z_2 = S} \\ \boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = P} \end{cases}$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $\boldsymbol{z^2 - Sz + P = 0}$.

<u>Définition</u> : *"Racines n^{ièmes} d'un nombre complexe"*

Soient $Z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On **appelle racine $\boldsymbol{n^{ième}}$** de Z, tout nombre complexe z vérifiant : $\boldsymbol{z^n = Z}$.

Si $Z = 1$, alors on dit que z est une **racine n^{ième} de l'unité**.

<u>Théorème</u> :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z = re^{i\theta}$ un nombre complexe non nul donné sous forme exponentielle.

– Les n racines n^{ièmes} de Z (les solutions de l' équation $z^n = Z$) sont les nombres complexes :

$\boldsymbol{z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}}$ avec $\boldsymbol{k \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$.

– Les images M_k des nombres complexes z_k sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrits dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = Z$