Rappels

- ✓ $\Omega=\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ est l'univers des possibles (ensemble des éventualités) associé à une épreuve, expérience, un jeu, …
  Exemples :
  - Lancer d'une pièce de monnaie : expérience aléatoire à deux issues $\Omega=\{pile, face\}$.
  - Tirage simultanée de deux boules d'une urne contenant quatre boules b_1, b_2, b_3 et b_4
    $\Omega=\{\{b_1,b_2\};\{b_1,b_3\};\{b_1,b_4\};\{b_2,b_3\};\{b_2,b_4\};\{b_3,b_4\}\}$
    $Card\Omega=6=C_4^2=\dfrac{A_4^2}{2!}=\dfrac{4\times 3}{2}$
- ✓ Toute partie A de Ω ($A\subset P(\Omega)$) est appelée évènement.
  - Si A = Ω alors A est un événement certain.
  - Si A = $\varnothing$ alors A est un événement impossible.
  - Tout singleton $\{e_i\}\subset\Omega$ est un évènement élémentaire.
- ✓ Soient A et B deux évènements de Ω.
  - L'événement « A et B » noté « $A\cap B$ »
    Si $A\cap B=\varnothing$ alors A et B sont deux évènements incompatibles.
  - L'événement « A ou B » noté « $A\cup B$ ».
  - L'événement contraire de A dans Ω est $\overline{A}=\Omega\setminus A=C_\Omega^A$.
- ✓ $A_1, A_2,....., A_n$ forment un système complet d'évènements de Ω si :
  $$\begin{cases}\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega \\ A_i\cap A_j=\varnothing \text{ si } i\neq j \text{ et } 1\le i\le n; 1\le j\le n\end{cases}.$$
- ✓ Loi de probabilité :
  Soit $\Omega=\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ l'univers des possibles associés à une épreuve. $P(\Omega)$ est l'ensemble des évènements. On appelle loi de probabilité définie sur $(\Omega, P(\Omega))$ toute application
  $$p: P(\Omega)\to\mathbb{R}_+ \quad A\mapsto p(A)$$ vérifiant :
  1. $p(\Omega)=1$.
  2. $\forall(A,B)\in P(\Omega)\times P(\Omega), A\cap B=\varnothing \Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.

  Le réel positif p(A) s'appelle la probabilité de l'événement A.
  <u>Propriétés :</u>
  - $\forall A\in P(\Omega)$, on a $A\cup\overline{A}=\Omega$ et $A\cap\overline{A}=\varnothing \Rightarrow p(A\cup\overline{A})=p(A)+p(\overline{A})=1 \Rightarrow \boxed{p(\overline{A})=1-p(A)}$.
    En particulier $p(\varnothing)=1-p(\Omega)=0$.
  - $\forall A\in P(\Omega)$, $p(A)\ge 0$ et $p(\overline{A})\ge 0 \Rightarrow 1-p(A)\ge 0 \Rightarrow p(A)\le 1 \Rightarrow \boxed{0\le p(A)\le 1}$.
  - Probabilité d'une réunion (formule des probabilités complètes) :
    - $\forall A\in P(\Omega)$ et $B\in P(\Omega)$, $A=(A\setminus B)\cup(A\cap B)$ (réunion disjointe).
      $p(A)=p(A\setminus B)+p(A\cap B) \Rightarrow p(A\setminus B)=p(A)-p(A\cap B)$.
    - $A\cup B=(A\setminus B)\cup B$ (réunion disjointe) $\Rightarrow$
      $p(A\cup B)=p(A\setminus B)+p(B) \Rightarrow \boxed{p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)}$.

Conséquences :

Si $\Omega=\{e_1,e_2,.....,e_n\}$ alors $p(e_1)+p(e_2)+.......+p(e_n)=1$.

Si $A=\{e_1,e_2,.....,e_p\}$ alors $p(e_1)+p(e_2)+.......+p(e_p)=p(A)$.

✓ Cas d'équiprobabilité (probabilité uniforme)

$\Omega=\{e_1,e_2,.....,e_n\}$; $Card\Omega=n$.

On se place dans le cas où toutes les éventualités ont la même probabilité alors

$p(e_1)=p(e_2)=.......=p(e_n)=\frac{1}{n}$. Dans ce cas p est une loi de probabilité uniforme

et on a : $\boxed{p(A)=\frac{CardA}{Card\Omega}=\frac{\text{Nombre de cas favorables à A}}{\text{Nombre de cas possibles}}}$.

✓ Exemple :

On lance deux fois de suite un dé équilibré à six faces. Il y a 36 résultats possibles (de (1, 1) à (6, 6) : ce sont des couples car on différencie le résultat du premier lancer de celui du deuxième) et on suppose que tous ces résultats ont la même probabilité (car le dé est équilibré). Appelons A l'événement : « le résultat du premier lancer est 1 »
et B l'événement : «le résultat du deuxième lancer est 1 ». L'événement $A\cup B$ est donc : « le résultat de l'un au moins des lancers est 1 ».

On a : $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.

Or, $p(A)=\frac{6}{36}$. De même, $p(B)=\frac{6}{36}$. L'événement $A\cap B$ ne se réalise que si le tirage est

(1, 1), c'est à dire dans un seul cas, donc $p(A\cap B)=\frac{1}{36}$.

Donc $p(A\cup B)=\frac{6}{36}+\frac{6}{36}-\frac{1}{36}=\frac{11}{36}$.

On peut aussi calculer la probabilité de l'événement contraire à $A\cup B$. Cet événement contraire est : «il n'y a eu 1 ni au premier coup ni au deuxième ». Il y a donc 5 possibilités pour le premier coup (de 2 à 6) et 5 pour le second.

Il y a donc 25 cas favorables et $p\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{25}{36}$. Donc : $p(A\cup B)=1-\frac{25}{36}=\frac{11}{36}$.

Dé 1 / Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	**(1,1)**	**(2,1)**	**(3,1)**	**(4,1)**	**(5,1)**	**(6,1)**
2	**(1,2)**	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	**(1,3)**	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	**(1,4)**	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	**(1,5)**	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	**(1,6)**	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

✓ Exercices :

Ex 1 :

Une urne contient 3 boules rouges, 4 boules blanches et 5 boules vertes. On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne. On suppose que les tirages sont équiprobables. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
A : « tirer 3 boules blanches »
B : « n'obtenir aucune boule rouge »
C : « tirer 3 boules tricolores »
D : « tirer au moins une boule verte »
E : « tirer au plus une boule rouge »

Ex 2 :

Une urne contient 5 boules rouges et 3 boules blanches indiscernables au toucher. On extrait successivement et sans remise 3 boules de l'urne. Déterminer la probabilité de
A : « obtenir 3 boules de même couleur »
B : « obtenir 2 boules rouges et 1 boule blanche »

Ex 3 :

Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire successivement et avec remise 3 jetons du sac. Calculer la probabilité des évènements suivants :
A : « tirer 3 jetons ayant des numéros pairs »
B : « tirer 3 jetons dont la somme des numéros est paire »

Rappelons que :

Types de tirages	**Ordre**	**Répétitions d'éléments**	**Dénombrement**
Successifs avec remise	On tient compte de l'ordre	Un élément peut être tiré plusieurs fois	n^p (p- listes)
Successifs sans remise		Un élément n'est tiré qu'une fois	A_n^p arrangements ($p \leq n$)
Simultanés	L'ordre n'intervient pas		C_n^p combinaisons ($p \leq n$)

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)........(n-p+1) \;;\; C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

Remarque :

On peut noter aussi C_n^p par $\binom{n}{p}$, on aura $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$

Probabilité conditionnelle :

Activité

Le tableau ci-dessous donne le nombre de fumeurs et de non fumeurs , hommes ou femmes dans une entreprise de 100 personnes

	Hommes	Femmes
Fumeurs	40	10
Non fumeurs	20	30

On choisit au hasard une personne parmi les cent.

1) a) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants

A : « la personne choisie est un fumeur »

H : « la personne choisie est homme »

b) Quelle est la probabilité de choisir un homme fumeur

2) a) Calculer la probabilité de l'événement

E : « la personne choisie est un fumeur sachant que c'est un homme »

. La probabilité de E est la probabilité conditionnelle de A sachant que H et réalisé et on la note $p_H(A)$ ou p(A/H)

Comparer p(A/H) et $\dfrac{p(A\cap H)}{p(H)}$

b) Sachant que la personne choisie est une femme , quelle est la probabilité qu'elle soit fumeur

Définition : p désigne une probabilité sur un univers fini Ω.
A et B étant deux événements de Ω, B étant de probabilité non nulle.

- On appelle ***probabilité conditionnelle*** de l'événement A sachant que B est réalisé le réel noté

$$p\left(A/B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{p\left(B\right)}.$$

- Le réel p(A /B) se note aussi $p_B(A)$ et se lit aussi probabilité de A sachant B.

Remarque :

Si A et B sont tous deux de probabilité non nulle, alors les probabilités conditionnelles p(A/B) et p(B/A) sont toutes les deux définies et on a : $p(A \cap B) = p(A/B)p(B) = p(B/A)p(A)$.

C'est le **principe des probabilités composées**

Arbres pondérés

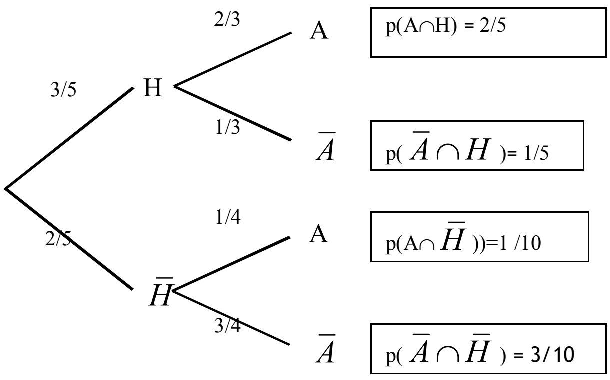
Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilité

Règles de construction

La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est **1**.

La probabilité de l'événement correspondant à un trajet est le produit des probabilités des différentes branches composant ce trajet.

L'arbre de probabilités ci-après modélise la situation de l'activité précédente



$\overline{H}$: « la personne choisie est une femme »
$\overline{A}$: « la personne choisie est non fumeur »

Exercice n°1

On jette une pièce de monnaie

- Si on obtient pile, on tire une boule dans l'urne P contenant 1 boule blanche et 2 boules noires.
- Si on obtient face, on tire une boule dans l'urne F contenant 3 boules blanches et 2 boules noires.
  1) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.
  2) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire sachant qu'on a obtenu pile
  3) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire
  4) Sachant qu'on a tiré une boule noire , quelle est la probabilité que l'on a obtenu pile

Exercice n°2 : « Efficacité d'un test »

Une maladie atteint 3% d'une population donnée. Un test de dépistage donne les résultats suivants :

- Chez les individus malades, 95% des tests sont positifs et 5% négatifs.
- Chez les individus non malades, 1% des tests sont positifs et 99% négatifs.

On choisit un individu au hasard.

1°) Construire l'arbre pondéré de cette expérience aléatoire.

2°) Quelle est la probabilité

a) qu'il soit malade et qu'il ait un test positif ?
b) qu'il ne soit pas malade et qu'il ait un test négatif ?
c) qu'il ait un test positif ?
d) qu'il ait un test négatif ?

3°) Calculer la probabilité

a) qu'il ne soit pas malade, sachant que le test est positif ?
b) qu'il soit malade, sachant que le test est négatif ?

INDÉPENDANCE

Événements indépendants

Définition : A et B sont 2 événements de probabilité non nulle.

- A et B sont ***indépendants*** lorsque la réalisation de l'un ne change pas la réalisation de l'autre.
- A et B sont ***indépendants*** si et seulement si p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B).

Théorème :

Deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** si et seulement si ils vérifient une des trois conditions :

p(A/B) = p(A) ou p(B/A) = p(B) ou p(A ∩ B) = p(A)p(B).

Démonstration :

- Par définition, les deux premières sont équivalentes
- si $p(A/B) = p(A)$ comme $p(A \cap B) = p(A/B)p(B)$ alors $p(A \cap B) = p(A)\,p(B)$
- si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$, comme $p(B) \neq 0$, $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A)$ c'est-à-dire $p_B(A) = p(A)$

Remarque :

Ne pas confondre événements **indépendants** et événements **incompatibles**.

- 2 événements A et B sont **indépendants** si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
- 2 événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

Exercice n°3

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant six jetons : trois rouges numérotés 1, 2 et 3, deux jaunes numérotés 1 et 2 , et un bleu numéroté 1.
On désigne respectivement par R, U et D les événements :
« le jeton est rouge », « le numéro est 1 » et « le numéro est 2 ».
Les événements R et U sont-ils indépendants ? Et les événements R et D ?

Probabilités totales

Définition : Soient Ω un univers associé à une expérience aléatoire et n un entier ≥ 2.
Les événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une ***partition*** de Ω si les trois conditions suivantes sont réalisées :

- pour tout $i \in \{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $A_i \neq \varnothing$.
- pour tous i et j (avec $i \neq j$) de $\{1 ;2 ;\dots n\}$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.
- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une ***partition*** de l'univers Ω constituée d'événements de probabilités non nulles et B un événement quelconque contenu dans Ω.

Alors : $$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$$

Ou $$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots\dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n).$$

Démonstration :

$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \dots \cup (B \cap A_n)$,
Les événements $(B \cap A_1)$, $(B \cap A_2)$, …, $(B \cap A_n)$ sont 2 à 2 incompatibles donc la probabilité de leur réunion est la somme de chacun d'entre eux , on en déduit :

$$p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n).$$

et en utilisant que, pour tout i de $\{1 ; 2 ; \dots ; n\}$, $p(B \cap A_i) = p_{A_i}(B) \times p(A_i)$, on obtient :

$$p(B) = p_{A_1}(B) \times p(A_1) + p_{A_2}(B) \times p(A_2) + \dots\dots + p_{A_n}(B) \times p(A_n)$$

Exercice n°4 :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 indiscernables. U_1 contient 4 boules rouges et trois boules vertes, U_2 contient 2 boules rouges et 1 boule verte .
On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.
Calculer la probabilité pour qu'elle soit rouge.