Résumé : *Dérivabilité*
Niveau : *Bac sciences techniques*

NetSchool 1
KNOWLEDGE BASE

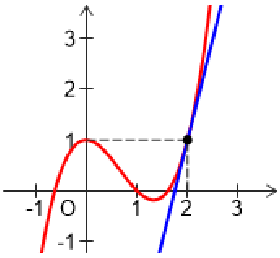
Définition : *"Dérivabilité en un point"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable en x_0**, si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée** de f en x_0, on le note $f'(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en x_0 de I, alors sa courbe représentative admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une tangente de coefficient directeur (ou pente) $f'(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{f'(x_0)}$. Une équation cartésienne de cette tangente est : $\boldsymbol{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.



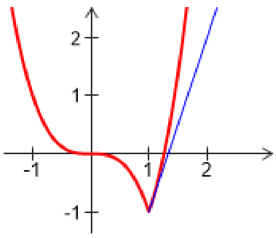
Définition : *"Dérivabilité à droite"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à droite en x_0**, si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à droite** de f en x_0, on le note $f'_d(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à droite :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à droite en x_0 de I, alors sa courbe représentative admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{1}{f'_d(x_0)}$. Une équation cartésienne de cette demi-tangente est : $\boldsymbol{y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ avec $x \geq x_0$.



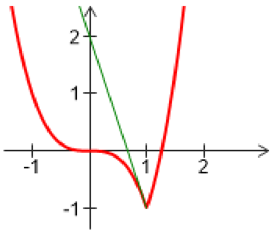
Définition : *"Dérivabilité à gauche"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

On dit que f est **dérivable à gauche en x_0**, si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et finie. Cette limite est appelée le **nombre dérivée à gauche** de f en x_0, on le note $f'_g(x_0)$.

Interprétation graphique du nombre dérivé à gauche :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable à gauche en x_0 de I, alors sa courbe représentative admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente de coefficient directeur $f'_g(x_0)$ et de vecteur directeur $\vec{\boldsymbol{u}}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\ f'_d(x_0)\end{pmatrix}$. Une équation cartésienne de cette demi-tangente est : $\boldsymbol{y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$ avec $x \le x_0$.



<u>Théorème</u> :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Dans ce cas : $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Théorème :

Si une fonction f est dérivable en un réel x_0, alors elle est continue en x_0.

<u>Définition</u> : " *Approximation affine* "

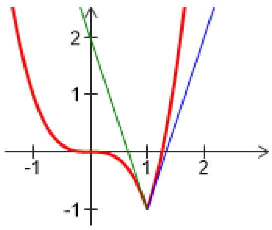
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en $x_0 \in I$.

Pour h voisin de 0, le réel $f(x_0) + hf'(x_0)$ est une **approximation affine** (valeur approchée) de $f(x_0 + h)$ en x_0. On écrit : $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + hf'(x_0)$.

Définition : *"Point anguleux"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

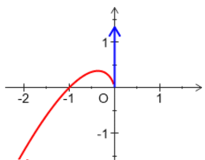
Si $f'_d(x_0) \neq f'_g(x_0)$, alors le point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ est un **point anguleux**.



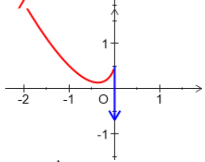
Tangentes verticales

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

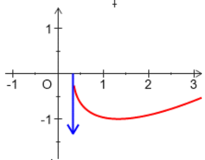
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente dirigée vers le haut.



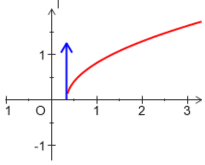
- Si $\lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente dirigée vers le bas.



- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente dirigée vers le bas.



- Si $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$, alors la courbe représentative de f admet au point $M\left(x_0, f(x_0)\right)$ une demi-tangente dirigée vers le haut.



Définition : "*Fonction dérivée*"

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.
On appelle fonction dérivée de f et on note f', la fonction qui à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé $f'(x)$, de f en x.

Définition : " *Dérivabilité sur un intervalle* "

- Une fonction définie sur un intervalle ouvert I est dérivable sur I ($]a,b[$, $]a,+\infty[$ ou $]-\infty,b[$) si elle est dérivable en tout réel de I.
- Une fonction est dérivable sur $[a,b]$ si elle est dérivable sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.
- Une fonction est dérivable sur $[a,b[$ (resp. sur $[a,+\infty[$) si elle est dérivable sur $]a,b[$ (resp. $]a,+\infty[$) et à droite en a.
- Une fonction est dérivable sur $]a,b]$ (resp. sur $]-\infty,b]$) si elle est dérivable sur $]a,b[$ (resp. $]a,+\infty[$) et à gauche en b.

Dérivées des fonctions usuelles :

$\boldsymbol{f(x) =}$	$\boldsymbol{f'(x) =}$
a (constante)	0
$x^n,\ n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt{ax+b}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$
$sin(ax+b)$	$a\ cos(ax+b)$
$cos(ax+b)$	$-a\ sin(ax+b)$
$tg(ax+b)$	$a[1+tg^2(ax+b)] = \frac{a}{cos^2(ax+b)}$
$cotg(ax+b)$	$-a[1+cotg^2(ax+b)] = -\frac{a}{sin^2(ax+b)}$

Opérations sur les fonctions dérivées :

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et soit a un réel.

Fonction	Fonction dérivée
$a\,u$	$a\,u'$
$u+v$	$u'+v'$
$u \cdot v$	$u'v+uv'$
u^n	$n\,u'\,u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Définition : " *Dérivée seconde* "

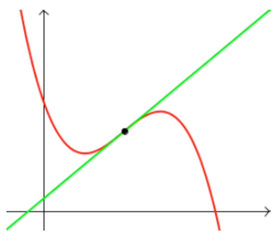
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée.

Si la fonction f' est dérivable sur I, alors f est dite **deux fois dérivable** sur I et la fonction dérivée de f', notée $\boldsymbol{f}"$, est appelée la **fonction dérivée seconde** de f.

Définition : " *Point d'inflexion* "

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel x_0 de I.

Le point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un **point d'inflexion** de la courbe C_f de f si C_f traverse sa tangente en ce point.



Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si $f"$ s'annule et change de signe en x_0, alors le point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Théorème :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

Si f' s'annule en x_0 sans changer de signe, alors le point $M\big(x_0, f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est décroissante sur $I \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.
- f est constante sur $I \Leftrightarrow f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$

Définition : *"Extremum"*

Soit f une fonction définie sur un intervalle sur un ensemble D.

m et M sont deux réels.

- M est **le maximum** (absolu ou global) de f sur D, si et seulement si, $f(x) \leq M$ pour tout $x \in D$ et s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = M$.
- m est **le minimum** (absolu ou global) de f sur D, si et seulement si, $f(x) \geq m$ pour tout $x \in D$ et s'il existe un réel $x_0 \in D$ tel que $f(x_0) = m$.
- Un maximum ou un minimum s'appelle aussi un **extremum**.
- Si m ou M est un extremum de f sur un intervalle ouvert $I \subset D$, on dit que m ou M est **un extremum local** de f sur D.

Théorème :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $x_0 \in I$.

- Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.
- Si f' s'annule en x_0 et change de signe, alors f admet un extremum local en x_0 égal à $f(x_0)$.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit g une fonction définie sur $f(I)$.

Soit $x_0 \in I$.

Si f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $\boldsymbol{(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) \cdot f'(x_0)}$

Corollaire 1 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et g est une fonction dérivable sur $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{(g \circ f)'(x) = f'(x) \cdot g'\big(f(x)\big)}$ pour tout $x \in I$.

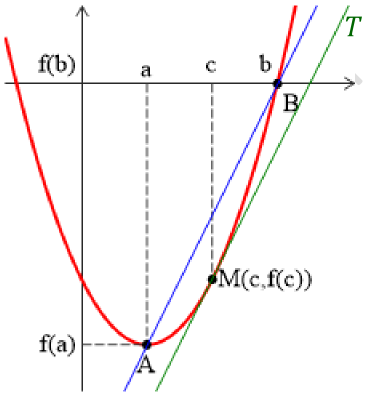
Corollaire 2 :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si $f(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et $\boldsymbol{\left(\sqrt{f}\right)'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}$ pour tout $x \in I$.

Théorème des accroissements finis :

> Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.
>
> Alors il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'c)$.

Interprétation graphique :



- Le réel $f'(c)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe C_f en son point d'abscisse c.
- Le rapport $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB) où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Donc $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'c) \Leftrightarrow T \;//\; (AB)$.

Ainsi, le théorème des accroissements finis affirme qu'il existe au moins un réel $c \in]a, b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c soit parallèle à la droite (AB).

Inégalités des accroissements finis :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe deux réels m et M tels que pour tout $x \in I$ on ait $m \leq f'(x) \leq M$, alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a : $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$.

Corollaire :

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et s'il existe un réel $k > 0$ tels que pour tout $x \in I$ on ait $|f'(x)| \leq k$, alors pour tous réels a et b de I tels que $a < b$ on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b - a|$$