Fonctions réciproques

Définition

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I.
On dit que f réalise une bijection de I sur f(I) (où f est une bijection de I sur f(I)), si pour tout y de f(I), l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I.

Théorème

si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I, alors f réalise une bijection de I sur f(I).

Définition

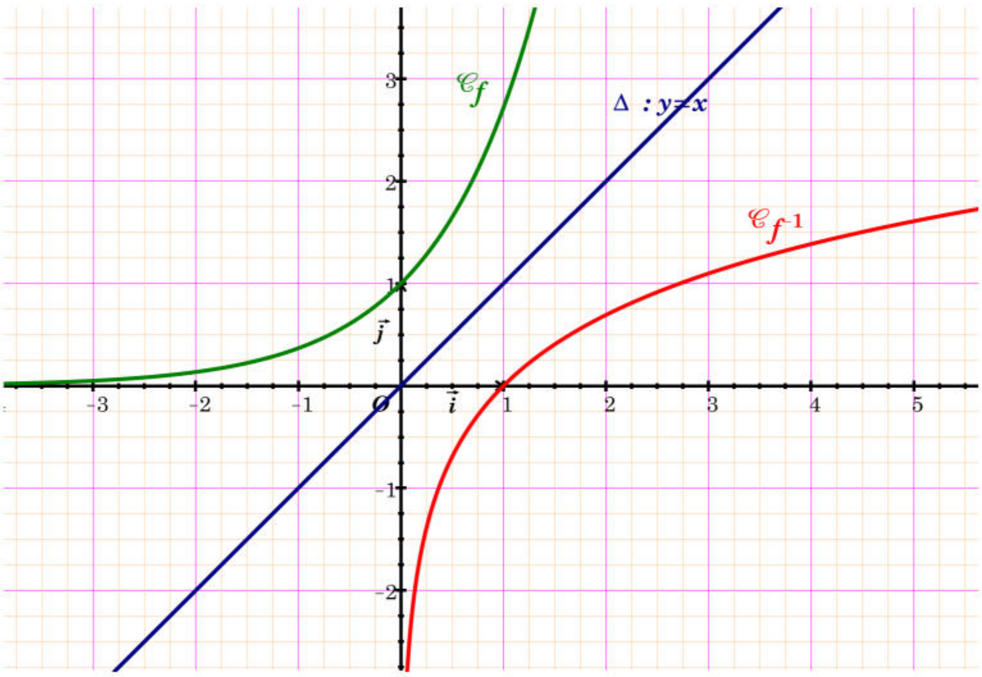
Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I). On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur f(I) qui à tout y de f(I), associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$

Conséquence

Soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I) et f^{-1} sa fonction réciproque.
Pour tout x de I et tout y de f(I), $f(x) = y$, si et seulement si, $f^{-1}(y) = x$.
$f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout x de I et $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout y de f(I).

Conséquence

Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$



Théorème

si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle f(I) et varie dans le même sens que f.

Théorème

Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur f(I), a un réel de I et b = f(a).
Si f est dérivable en a et si $f'(a)\neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b et
$(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$.
Ce résultat reste valable lorsqu'il s'agit de dérivée à droite ou à gauche en a.

Corollaire

soit f une bijection d'un intervalle I sur f(I).
Si f est dérivable sur I et $f'(x)\neq 0$ pour tout x de I, alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'\left[f^{-1}(y)\right]}$, pour tout y de f(I).

Théorème et définition

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
La fonction $x\mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine n$^{\text{iéme}}$.

L'image d'un réel positif x par la fonction racine n$^{\text{éme}}$ est noté $\sqrt[n]{x}$ se lit " racine n$^{\text{éme}}$ de x". lorsque n = 2 et pour x positif $\sqrt[2]{x}=\sqrt{x}$.

Conséquence

- Pour tous réels positifs x et y, $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=+\infty$

Conséquence

Soit deux entiers n et p tels que $n\geqslant 2$ et $p\geqslant 2$ et deux réels positifs a et b. Alors

$\sqrt[n]{a^n}=a$ $\quad(\sqrt[n]{a})^n=a$ $\quad\sqrt[n]{a.b}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$ $\quad\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b\neq 0$

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[np]{a^p}$ $\quad(\sqrt[n]{a})^p=\sqrt[n]{a^p}$ $\quad\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}}=\sqrt[np]{a}$

Théorème

Pour tout entier n $\geqslant 2$ la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus $f'(x) = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$, pour tout $x > 0$.

Théorème

Pour tout entier n $\geqslant 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.
De plus $f'(x) = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$, pour tout $x > 0$.

Théorème

Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier n $\geqslant 2$.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)}^{n-1}}$, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.