Limites et Continuité

I. Rappels et compléments:

1) Limite en l'infini :

a) Limite infinie :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a\,; +\infty[$. Dire que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $x > B$ et $x \in I$.

b) Limite finie :

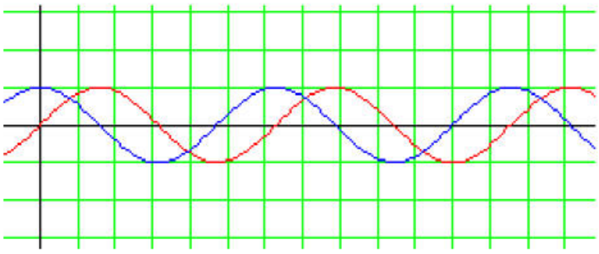
Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a\,; +\infty[$. Dire que la limite de f en $+\infty$ est l signifie que pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $B > 0$ tel que : $|f(x) - l| < \varepsilon$ dés que $x > B$ et $x \in I$.

Note : Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $y = l$.
On dit alors que D est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.

c) Sans limite !

Toutes les fonctions n'admettent pas nécessairement une limite lorsque x tend vers $+\infty$.
C'est par exemple le cas avec les fonctions sinus et cosinus :



Lorsque x s'en va vers $+\infty$, sinus et cosinus n'ont aucune limite finie ou infinie...

2) Limite en un point :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a. Dire que la limite de f en a est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $|x - a| < \alpha$ et $x \in I$.

Note : Lorsque x tend a, la courbe de la fonction f se rapproche de plus en plus de la droite D d'équation $x = a$.
On dit alors que D est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de a.

Nous avons exclusivement évoqué des fonctions qui tendent vers $+\infty$ à l'approche d'un point. Mais il existe aussi des fonctions qui ont pour limite $-\infty$. C'est à peu près pareil.

3) Limite à gauche et limite à droite :

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a\,; a+r[$, $r > 0$ (respectivement $]a-r\,; a]$).
Dire que la limite de f à droite (respectivement) en a est $+\infty$ signifie que pour tout $A > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $f(x) > A$ dès que $0 < x - a < \alpha$ (respectivement $0 < a - x < \alpha$) et $x \in I$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur $I = [a ; a+r[$, $r > 0$ (respectivement $]a-r ; a]$).
Dire que la limite de f à droite (respectivement à gauche) en a est l signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $|f(x) - l| < \varepsilon$ dés que $0 < x-a < \alpha$ (respectivement $0 < a-x < \alpha$) et $x \in I$.

Remarque :

On définit de même le cas où f tend vers $-\infty$.

Théorème :

$\lim\limits_{a} f = l$ si et seulement si $\lim\limits_{a^+} f = \lim\limits_{a^-} f = l$ (l finie ou infinie).

4) Limites des fonctions usuelles :

Fonction	Ensemble de définition	Limite en $-\infty$	Limite en 0	Limite en $+\infty$
x	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$]-\infty ; +\infty[$	$+\infty$	0	$+\infty$
x^3	$]-\infty ; +\infty[$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$]-\infty ; 0 [\cup]0 ; +\infty[$	0	$\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$	0
$\sqrt{x}$	$[0 ; +\infty[$		0	$+\infty$
sin(x) cos(x)	$]-\infty ; +\infty[$	N'existe pas	0 1	N'existe pas

5) Opérations sur limites des fonctions :

a) Limite d'une somme :

Limite de f	Limite de g	Limite de f + g
l	l'	l + l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	Indéterminée

b) Limite d'un produit.

Limite de f	Limite de g	Limite de f . g
l	l'	$l \times l'$
$l\neq0$	∞	∞ (avec la R.S)
∞	∞	∞ (avec la R.S)
0	∞	Indéterminée

R.S = règle de signe

c) Limite d'un quotient.

Par rapport à multiplication, la division ajoute le fait qu'on ne peut pas diviser par 0.

Limite de f	Limite de g	Limite de f / g
l	$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$
l	∞	0
∞	l'	∞ (avec la R.S)
∞	∞	Indéterminée
l	0	∞ (avec la R.S)
∞	0	∞ (avec la R.S)
0	0	Indéterminée

1) Limite d'un polynôme ou rationnelle :

Théorème :

- La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la même que celle de son terme de pus haut degré.
- La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Théorème :

Soit f, g, et h trois fonctions
On suppose que pour x assez grand, on a : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
Alors si les fonctions g et h ont la même limite L en l'infini, la fonction f à l'infini est aussi égale à L

Théorème :

* Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
* Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
* Les fonctions $x \mapsto \cos(ax+b)$ et $x \mapsto \sin(ax+b)$ sont continues en tout réel.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

* Si f est continue en a alors les fonctions α f ($\alpha \in \mathbb{R}$), et f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont continues en a.
* Si f est continue en a et f (a) $\neq 0$ alors les fonctions $\frac{1}{f}$, f^n ($n \in \mathbb{Z}^*-$) sont continues en a.
* Si f et g sont continues en a alors f+g et f $\times$ g sont continues en a.
* Si f et g sont continues en a et g (a) $\neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
* Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur l'intervalle I et continue en a telle que g(x) = f (x) pour x $\neq$ a, alors $\lim_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert et a un réel de I et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$.
Si la fonction f admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers a, on dit que f est prolongeable par continuité en a et la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I/\{a\} \\ \ell & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

La fonction g est appelée le prolongement par continuité de f en a.

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et sauf peut être en un réel a de I.
$\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \ell$.

Soit a un réel.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a-h, a]$ ($h > 0$).
  f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, a+h[$ ($h > 0$).
  f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
  f est continue en a, si et seulement si, f est continue à gauche et à droite en a.

Définitions :

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout réel de I.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$.

On dit que f est continue sur $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$, à droite en a et à gauche en b.

- De même on définie la continuité de f sur es intervalles suivants :

$[a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$ et $]-\infty,a]$.

II. Branches infinies :

Définitions (Rappels)

* Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère.
Si la limite de f, à droite en a (respectivement à gauche en a), est infinie, on dit que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe C_f, à droite en a respectivement à gauche en a).
* Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.
- Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$, $L \in \mathbb{R}$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$), on dit que la droite d'équation $y = L$ est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$).
- Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (ax + b)) = 0$), on dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (respectivement au voisinage de $-\infty$).

Théorèmes (Rappels et compléments)

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Lorsque la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$ est infinie, pour déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$, on peut procéder de la manière suivante : on cherche
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie alors C_f admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une branche parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors on cherche $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax)$ et :

– Si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

– Si $(f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptote à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$ (on dit aussi que C_f admet une branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $+\infty$)

On peut procéder de la même façon pour la recherche de la nature de la branche parabolique de direction celle de la droite d'équation $y = ax$ au voisinage de $-\infty$ lorsque la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$ est infinie.

III. Continuité et limite d'une fonction composée :

1) Composée de deux fonctions :

Définition :

Soit u une fonction définie sur un ensemble I et V une fonction définie sur un intervalle J tel que u (I) est inclus dans J.
La fonction notée $v \circ u$, définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$ est appelée fonction composée de u et v.

2) Continuité d'une fonction composée :

Théorème :

Soit u une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a.
Soit v une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel u (a).
Si u est continue en a et v continue en u (a) alors la fonction $v \circ u$ est continue en a.

3) Limite d'une fonction composée :

Théorème :

Théorème : Soit f et g deux fonctions. a, L et L' trois réels éventuellement égaux à +/− ∞

Si $\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{t \to L} g(t) = L' \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = L'$

IV. Limite et ordre :

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert, a un réel de I, f, u et v trois fonctions définies sur I ou I/$\{a\}$.

- Si u (x) $\leq$ v(x) pour tout x de I/ $\{a\}$ et si u et v ont des limites finies en a alors $\lim\limits_{a} u \leq \lim\limits_{a} v$.
- Si u(x)$\leq$ f(x)$\leq$v(x) pour tout x de I / $\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = \lim\limits_{a} v = \ell$ alors $\lim\limits_{a} f = \ell$.

Ces résultats restent encore valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

Théorème :

Soit I un intervalle ouvert, a un réel de I, f et u deux fonctions définies sur I ou I/$\{a\}$.

1) Si f (x) $\geq$u(x) pour tout x de I/ $\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = +\infty$ alors $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
2) Si f(x)$\leq$ u(x) pour tout x de I/ $\{a\}$ et si $\lim\limits_{a} u = -\infty$ alors $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

Ces résultats restent encore valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a.

V. Image d'un intervalle par une fonction continue :

Théorème : (Rappel)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème (admis) :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ (a$\langle$ b), il existe au moins deux réels α et β $[a,b]$ tels que f $([a,b]) = [f(\alpha), f(\beta)]$

f (α) est la valeur minimale de f sur$[a,b]$.

f (β) est la valeur maximale de f sur$[a,b]$.

On dit que f atteint ses bornes en α et β.

Théorème : (Rappel : Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a$\langle$ b.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b) l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle$[a,b]$.

Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ (a $<$ b).

Si l'on a f (a), f (b) $<$ 0 alors l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $]a,b[$.

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I.