

Nombres complexes

Définition et opérations sur les nombres complexes

Théorème et définition :

Il existe un ensemble appelé ensemble de nombres complexes, noté \mathbb{C} et vérifiant les propriétés ci-dessous

- L'ensemble \mathbb{C} contient l'ensemble de nombres réels \mathbb{R}
- Il existe un élément de \mathbb{C} , noté i , tel que $i^2 = -1$
- L'ensemble \mathbb{C} est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans \mathbb{R}
- Tout élément z de \mathbb{C} s'écrit de la façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels

Conséquences

Soit $z = a + ib$, et $z' = a' + ib'$, où a, a', b, b' sont des réels. Alors

$z = z'$ si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$

$z = 0$ si et seulement si $a = b = 0$

z est réel si et seulement si $b = 0$

z est imaginaire si et seulement si $a = 0$

Conjugué d'un nombre complexe :

Définition :

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ où a et b deux réels. On appelle conjugué de z le complexe noté et défini par : $\bar{z} = a - ib$.

Propriétés

* Pour tous les nombres complexes z et z' , $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{zz'} = \bar{z} \bar{z}'$; $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$;

$n \in \mathbb{N}^*$

* Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z' ,

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} ; \overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\bar{z}')^n}, n \in \mathbb{Z}$$

* $z = \bar{z}'$ si et seulement si z est réel

* $z = -\bar{z}$ si et seulement si z est imaginaire

Affixe d'un point, affixe d'un vecteur :

Définition :

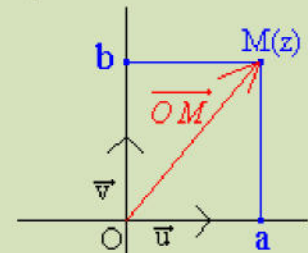
On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

■ Au point M de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.
On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de M .

■ Au vecteur \vec{w} de coordonnées $(a; b)$, on peut associer le nombre complexe $z = a + ib$.

On dit que $z = a + ib$ est l'affixe de \vec{w} .

■ Lorsqu'on repère un point ou un vecteur par son affixe dans un repère orthonormé direct, on dit qu'on se place dans le plan complexe.



Propriétés :

Si M a pour affixe $z = a + ib$ et si M' a pour affixe $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' réels, alors :

• Le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour affixe $z' - z = (a' - a) + (b' - b)i$.

• $OM = \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

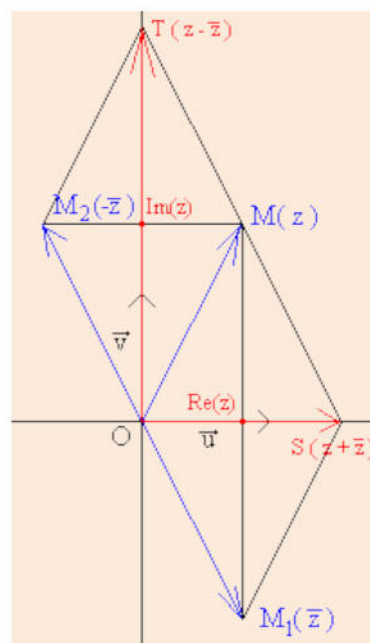
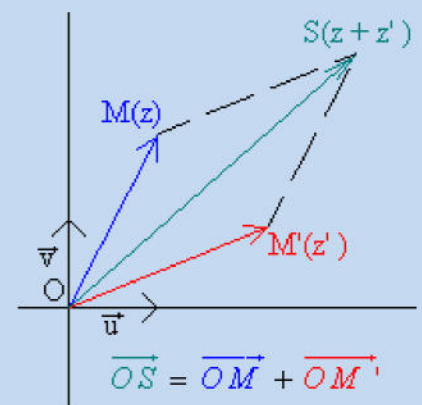
• $MM' = \|\overrightarrow{MM'}\| = \sqrt{(a' - a)^2 + (b' - b)^2}$.

• Le milieu I de $[MM']$ a pour affixe $z_I = \frac{z + z'}{2}$.

• Si $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$ alors $\text{aff}(\overrightarrow{OS}) = z + z'$.

• Si \vec{w} a pour affixe z et \vec{w}' pour affixe z' ,
alors $\vec{w} + \vec{w}'$ a pour affixe $z + z'$.

• Si k est un réel, alors $k\vec{w}$ a pour affixe kz .



Propriété

Soit \vec{w} et \vec{w}_1 deux vecteurs tels que \vec{w}_1 non nul.

Les vecteurs \vec{w} et \vec{w}_1 sont colinéaires, si et seulement si, $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w}_1}}$ est réel

Propriété

Soit \vec{w} et \vec{w}_1 deux vecteurs tels que \vec{w}_1 non nul

Les vecteurs \vec{w} et \vec{w}_1 sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_{\vec{w}}}{z_{\vec{w}_1}}$ est imaginaire

Module d'un nombre complexe :

Définition :

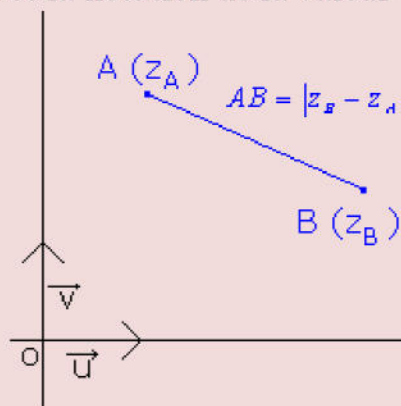
Soit le nombre complexe z de forme algébrique $a + ib$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle module de z le nombre réel positif $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \bar{z}}$.

On note $r = |z|$.

Remarques :

- La notation $|z|$ ne risque pas de prêter à confusion avec la notation de la valeur absolue puisque lorsque x est un nombre réel, on a $r = OM = |x|$.
- Pour un réel x , $|x|$ pourra être lu indifféremment "valeur absolue de x " ou "module de x ".
- Pour un nombre complexe non réel z , $|z|$ sera lu impérativement "module de z ".
- Si \vec{w} est un vecteur d'affixe z alors $\|\vec{w}\| = |z|$.
- A et B deux points 'affixes respectives z_A et z_B alors $AB = |z_B - z_A|$.



Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z'

$|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$; $|zz'| = |z||z'|$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|, k \in \mathbb{R}$; $|\bar{z}| = |z|$;

$|z^n| = |z|^n, n \in \mathbb{N}^*$; $\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}, z \neq 0$; $\left| \frac{z'}{z} \right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \neq 0$; $\left| \frac{1}{z^n} \right| = \frac{1}{|z|^n}, z \neq 0, n \in \mathbb{Z}$

Argument d'un nombre complexe non nul :

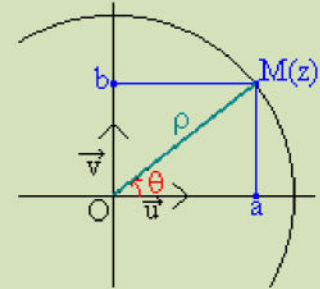
Définition :

Soit un nombre complexe non nul z de forme algébrique $a + ib$ et soit M le point d'affixe z .

On appelle argument de z tout nombre réel θ tel que :

$$\theta \equiv (\vec{u} ; \overrightarrow{OM}) [2\pi]$$

On note $\theta \equiv \arg(z) [2\pi]$.



Remarque :

θ n'est pas unique, il est défini à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$) c'est à dire modulo 2π .

Propriétés :

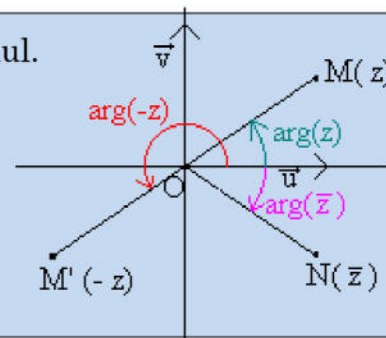
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$$

Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z) [2\pi]$

Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$



Propriétés :

Soit deux nombres complexes non nul z et z'

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$$

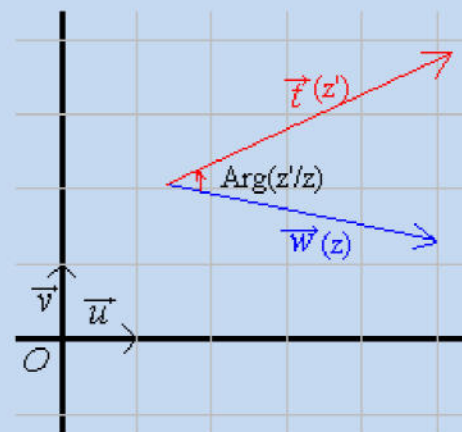
$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z) [2\pi]$$

$$\arg(z^n) \equiv n \arg(z) [2\pi], n \in \mathbb{Z}$$

pour tout nombre complexe non nul z et tout entier n , $z^n = |z|^n$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$: c'est la formule de **MOIVRE**.



Propriété

Si deux nombres complexes z et z' sont écrits sous forme trigonométrique :
 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et $z' = r'(\cos \theta' + i \sin \theta')$, on a :

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta \equiv \theta' \quad [2\pi] \end{cases}$$

Angles orientés et nombres complexes :

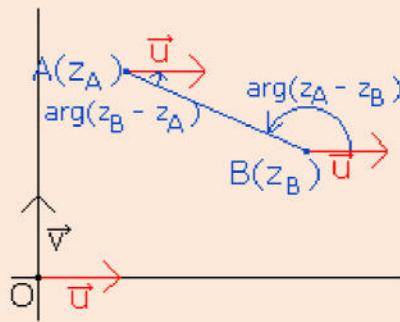
Théorème :

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Soient A, B, C et D des points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$

- le vecteur \overrightarrow{AB} a pour affixe $z_B - z_A$, et on a :

$$AB = |z_B - z_A| \quad \text{et} \quad (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A) \quad [2\pi].$$



- $\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{CD}{AB} (\cos \theta + i \sin \theta)$ avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi] \equiv \theta [2\pi]$

Conséquence :

$$\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) = \frac{CD}{AB} (\cos \theta + i \sin \theta) \quad \text{avec} \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \theta [2\pi]$$

Ecriture exponentielle d'un nombre complexe non nul :

Notation :

Pour tout réel θ , on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos \theta + i \sin \theta$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) , un point M appartient au cercle trigonométrique de centre O, si et seulement s'il a pour affixe $z = e^{i\theta}$, où $\theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi]$.

Conséquences

$$e^{i0} = 1, e^{i\pi} = -1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i; e^{i\pi} = -1$$

Pour tout réel θ et tout entier k , $e^{i\theta} = e^{i(\theta+2k\pi)}$

Pour tout réel θ , $|e^{i\theta}| = 1$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$

Propriétés

Soient deux réels θ et θ'

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}; \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}; \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}; (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$$

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z , s'écrit sous la forme $z = r e^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$
L'écriture $z = r e^{i\theta}$, $r > 0$ est appelé écriture exponentielle de z .

Equation $z^n = a$, $n \geq 1$, $a \in \mathbb{C}$

Théorème et définition

Pour tout entier naturel non nul n , l'équation $z^n = 1$ admet dans \mathbb{C} n solutions distinctes définies par $z_k = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$ l'entier k appartenant à $\{0, 1, \dots, (n-1)\}$

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v})

Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et n un entier naturel non nul. L'équation $z^n = a$ admet dans \mathbb{C} , n solutions distinctes définies par : $z_k = e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$. Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a .

Conséquence :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) et soit $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$

Résolution dans \mathbb{C} de l'équation $az^2+bz+c=0$; $a \neq 0$

Théorème :

Soient a , b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$, alors on a :

$$az^2+bz+c = a(z-z_1)(z-z_2), \quad z_1+z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1z_2 = \frac{c}{a}.$$

Méthode de résolution dans \mathbb{C} , de l'équation (E) : $az^2+bz+c=0$; $a \neq 0$

- Si $c=0$ (E) s'écrit $z(az+b)=0$ et admet comme solutions $z_1=0$ et $z_2=-\frac{b}{a}$
- Si $b=0$ (E) s'écrit $z^2=-\frac{c}{a}$ et la résolution de (E) se ramène à la recherche des racines carrées du nombre complexe $-\frac{c}{a}$
- Si $bc \neq 0$, on détermine une racine carrée δ du discriminant $\Delta = b^2-4ac$. Les solutions de (E) sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$.

Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Théorème :

Soit a_1, a_2, \dots, a_n des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$; $n \geq 2$

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$

Si z_0 est un zéro de P , alors $P(z) = (z-z_0)g(z)$, où $g(z) = a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0$, avec b_0, b_1, \dots, b_{n-2} complexes.

Nombres complexes et trigonométrie

Théorème :

Pour tout réel x et pour tout entier n

$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$. **Formule de MOIVRE**

Pour tout réel x ,

$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$. **Formules d'Euler**