Produit scalaire dans le plan

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté par $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par :

- Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $\vec{u}.\vec{v}=OA.OB\cos\widehat{AOB}$ où $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$.

Propriétés :

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs du plan et α et β deux réels.

- $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$.
- $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.
- $(\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha(\vec{u}.\vec{v})$.
- $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}.\vec{v})$.
- $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
- $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}$.
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}$.
- $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2\right)$.
- $\vec{u}\perp\vec{v}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- $|\vec{u}.\vec{v}|\leq\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
- $|\vec{u}.\vec{v}|=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$ et $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$. Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA) alors : $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$.

Expression du produit scalaire dans une base orthonormée :

Soit $(\vec{i},\vec{j})$ une base orthonormée du plan. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors on a :

$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$.

Théorème :

Soient A et B deux points distincts du plan.
L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.