SUITES RÉELLES

I. Rappels et compléments sur les suites :

Définition d'une suite réelle :

Une suite (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ qui à tout entier naturel n associe un et un seul réel noté u_n.
Autrement écrit :

$$(u_n) : \quad \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \;; \quad n \longmapsto u_n = u(n)$$

Note : l'image de l'entier n est notée u_n au lieu de $u(n)$.

Ainsi : (u_n) désigne la suite. On aurait pu l'appeler u .

A retenir : On dit aussi que u_n est le terme de rang n de la suite.

Suites arithmétiques et géométriques :

Suites arithmétiques :

Définition :

Dire que la suite (u_n) est arithmétique de raison r signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$

Propriété :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r alors pour tout entier n,
$u_n = u_0 + n \times r$
De même, si n et p sont deux entiers naturels quelconques alors :
$u_n = u_p + (n - p) \times r$

Remarque :

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il suffit de prouver que la différence entre deux termes consécutifs est constante. C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que pour tout entier n, $u_{n+1} - u_n = \textit{constante} = r$. Si r est nul alors (u_n) est constante.

Somme des n premiers termes :

Théorème :

Soit u une suite arithmétique définie sur $\mathbb{N}$.

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = \frac{n \times (u_0 + u_{n-1})}{2} \;;\; n \in \mathbb{N}^*.$$

Plus généralement, si n et p deux entiers naturels tels que p<n alors :

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots\dots + u_n = \frac{(u_p + u_n)(n - p + 1)}{2}.$$

Suites géométriques :

Définition :

Dire que la suite (u_n) est géométrique de raison q signifie que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times q$.

Propriété :

Si u est une suite géométrique de raison $q \neq 0$ alors pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$
De même, si n et p sont deux entiers naturels quelconques alors $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Somme des n+1 premières puissances d'un nombre réel :

Théorème :

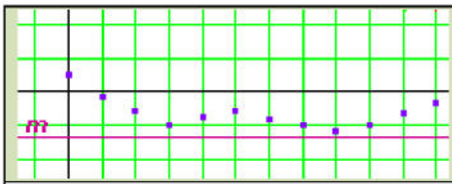
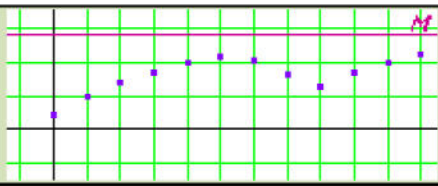
Si n est un entier naturel non nul et si $\boldsymbol{q}$ est un réel différent de 1 alors :

$$S_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_n = U_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Et dans le cas général : $S_n = 1^{er} \text{ terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Suites bornées :

Définitions

	
Une suite (u_n) est minorée s'il existe un réel constant $\boldsymbol{m}$ tel que pour tout entier n, $u_n \geq \boldsymbol{m}$.	Une suite (u_n) est majorée s'il existe un réel constant $\boldsymbol{M}$ tel que pour tout entier n, $u_n \leq \boldsymbol{M}$.
Une suite est bornée si est seulement si elle est majorée et minorée à la fois.	

Monotonie :

Définitions :

- Une suite (u_n) est croissante si est seulement si pour tout entier n, $u_n \leq u_{n+1}$
- Une suite (u_n) est décroissante si est seulement si pour tout entier n, $u_n \geq u_{n+1}$.
- Une suite est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

Convergence :

Définition :

Une suite est dite convergente lorsqu'elle admet une limite finie quand n tend vers $+\infty$.
Une suite non convergente est dite divergente, dans ce cas elle tend vers l'infinie ou n'admet pas de limite.

Théorème :

Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini

$$\lim_{n\to\infty} u_n = a \text{ si et seulement si } \lim_{n\to+\infty} u_{2n} = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a$$

Théorème :

Soit une suite (u_n)

- Si la suite (u_n) converge vers un réel a, alors elle est bornée
- Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors elle n'est pas majorée
- Si la suite (u_n) tend vers $-\infty$, alors elle n'est pas minorée

Théorème :

Soit une suite (u_n) convergente vers un réel a.

- S'il existe un entier N_0 tel que $0 < u_n$ (respectivement $0 \leqslant u_n$), $n \geqslant N_0$, alors $0 \leqslant a$.
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n < 0$ (respectivement $u_n \leqslant 0$), $n \geqslant N_0$,

alors $a \leqslant 0$.

Conséquence :

Soit une suite (u_n), $n \geqslant 0$. on suppose qu'il existe deux réels m et M tel que $m < u_n < M,\ n \geqslant 0$
Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a, alors $m \leqslant a \leqslant M$

Théorème :

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geqslant 0$
* Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
* Si $q < 1$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$
* Si $q \leqslant -1$ alors la suite (u_n) n'a pas de limite

II. Suites de type $v_n = f(u_n)$:

Théorème :

Soit f la fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I
Si (u_n) tend vers a alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$

Théorème :

Soit f la fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I
Si l (fini ou infini) et si $\lim\limits_{x \to l} f(x) = L$ (fini ou infini) alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (f(u_n)) = L$.

III. Limites et ordres :

Théorème :

Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b
S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leqslant v_n$, $n \geqslant N_0$ alors $a \leqslant b$

Théorème :

Soit trois suites réelles (u_n), (v_n) et (w_n)
On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$, $n \geqslant N_0$
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$

Conséquence :

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n)
On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leqslant |u_n| \leqslant v_n$; $n \geqslant N$
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Théorème :

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) :
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leqslant v_n$, $n \geqslant N_0$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \geqslant v_n$, $n \geqslant N_0$ et si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

IV. Convergence des suites monotones :

Théorème (admis) :

Soit (u_n) une suite définie pour $n \geqslant 0$
Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel α et on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \leqslant \alpha$
Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel α et on a pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \alpha$

Théorème :

Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$
Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$

V. Suites récurrentes :

Théorème :

Soit une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geqslant 0$ où f est une fonction.
Si la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente vers un réel $\mathscr{L}$ si la fonction f est continue en $\mathscr{L}$ alors $\mathscr{L} = f(\mathscr{L})$

VI. Suites adjacentes :

Définition et théorème :

Deux suites $(u_n)_{n \geqslant 0}$ et $(v_n)_{n \geqslant 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions :

- L'une croissante et l'autre décroissante.
- La suite $(v_n - u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers 0.

Conséquence :

Soit u et v deux suites adjacentes telles que u est croissante et v décroissante alors on pour tout n, $u_n \leq v_n$ et u et v convergent vers la même limite.