▹ Fonction Logarithme Népérien :

⊗ **Définition :**

La fonction **Logarithme** Népérien, notée Log ou Ln , est la **primitive** sur $]0,+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1 signifie $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , x > 0.$

⇒ **Conséquence** :

- $Ln :]0,+\infty[\to IR$ avec $(Ln)'(x) = \dfrac{1}{x}$; et $Ln\ 1 = 0$
  $x \mapsto Ln\ x$

⊗ **Propriétés :**

- **Ln (a b) = Ln a + Ln b** ; **pour tout a > 0 et b > 0 .**
- $\mathbf{Ln\ \frac{1}{b} = -\ Ln\ b}$; **pour b > 0.**
- $\mathbf{Ln\ \frac{a}{b} = Ln\ a - Ln\ b}$; **pour a > 0 et b > 0.**
- $\mathbf{Ln\ (a^n) = n\ Ln\ a}$; **pour a > 0 et n** $\in \mathbb{Z}$ **.**
- $\mathbf{Ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} Ln\ a}$ • $\mathbf{Ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} Ln\ a}$; **pour a > 0 .**

⊗ **Limites :**

- $\lim\limits_{x\to+\infty} Ln\ x = +\infty$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} Ln\ x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln\ x}{x} = 0 \quad (0^+)$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,Ln\ x = 0 \quad (0^-)$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{Ln\ x}{x} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{Ln^m\ x}{x^n} = 0$ • $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n.Ln^m\ x = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{Ln\ (1+x)}{x} = 1$ • $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{Ln\ x}{x-1} = 1$

⊗ **Sens de variation :**

La fonction Logarithme Népérien est strictement croissante sur IR^*_+ et on a le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$(Ln)'(x)$	+	
$Ln\ x$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

⇒ **Conséquences importantes :**

- La fonction Logarithme Népérien est une bijection de $]0,+\infty[$ sur IR ;
- L'équation : Ln x = 1 possède une seule solution notée : e ; on a donc **Ln e = 1** .
- Pour a > 0 et b > 0 on a : [***Ln a = Ln b***] ⇔ [***a = b***].
  [***Ln a*** ≥ ***Ln b***] ⇔ [***a*** ≥ ***b***].
- Pour tout $x \in]0,1]$ on a : **Ln x ≤ 0.**
- Pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : **Ln x > 0.**

⊗ **Dérivées et primitives :**

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de IR alors la fonction :
  (Ln o u) est dérivable sur I et on a : $\mathbf{(Ln\ (u))'(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
- Les primitives de la fonction définie sur I par $\mathbf{f(x)} = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont les fonctions F définies sur I par :

  $\mathbf{F(x) = Ln}\ |u(x)| + k$; avec $k \in IR$

⊗ **Primitive de Lnx :**

Une **primitive** de la fonction : $x \mapsto Ln(x)$ sur $]0,+\infty[$ est la fonction : $x \mapsto \boldsymbol{x.Lnx - x + k}$. avec $k \in IR$.