



Soit  $F$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

1– Montrer que  $F$  est une fonction impaire

existance de  $F$ :

\*on a:  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow F$  est donc sa primitive sur  $\mathbb{R}$  qui s'annule en 0.

$\Rightarrow F$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$

$F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Parité de  $F$ :

On pose  $u(x) = F(x) + F(-x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Alors  $u$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

et  $u'(x) = F'(x) - F'(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0$

Donc  $u(x) = c$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Or  $u(0) = 2F(0)$  et  $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$  d'où  $u(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x) + F(-x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  ALors  $F$  est une fonction impaire.



Soit  $G$  la fonction définie sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  par  $G(x) = F(\tan x)$

1– Justifier que  $G$  est déivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  et calculer  $G'(x)$ .

2 – Déduire l'expression de  $G$  sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

3 – Déterminer alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

4 – Etudier les variations de  $F$

5 – Construire  $\zeta_F$

1–

\* $x \mapsto \tan x$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

\* $x \mapsto F(x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow G$  est dérivable sur  $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ .

et  $G'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$

2-

Comme  $G'(x) = 1$  pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Alors pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  on a:  $G(x) = x + c$

Or  $G(0) = F(0) = 0$

Donc pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  on a  $G(x) = x$

3-

Comme:  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

Alors  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

Or  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$

Donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$

4-

$*D_F = \mathbb{R}$

$*\lim_{+\infty} F = \frac{\pi}{2}$  et puis que  $F$  est impaire alors  $\lim_{-\infty} F = -\frac{\pi}{2}$

$*F$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

|      |                  |                 |
|------|------------------|-----------------|
| $x$  | $-\infty$        | $+\infty$       |
| $F'$ | +                |                 |
| $F$  | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |

5-

l'origine  $O$  est un centre de symétrie

et aussi un point de la courbe  $\zeta_F$

donc c'est un point d'inflexion.

$F(0) = 0$  et  $F'(0) = 1$  les droites  $y = \frac{\pi}{2}$  et  $y = -\frac{\pi}{2}$  sont des asymptotes à  $\zeta_F$

