

Q1

Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$
1- Montrer que F est une fonction impaire

existence de F :

*on a: $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est une fonction continue sur \mathbb{R} .

$\Rightarrow F$ est donc sa primitive sur \mathbb{R} qui s'annule en 0.

$\Rightarrow F$ est bien définie sur \mathbb{R}

F est dérivable sur \mathbb{R} et $F'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Parité de F :

On pose $u(x) = F(x) + F(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Alors u est dérivable sur \mathbb{R}

$$\text{et } u'(x) = F'(x) - F'(-x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(-x)^2} = 0$$

Donc $u(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Or $u(0) = 2F(0)$ et $F(0) = \int_0^0 \frac{1}{1+t^2} dt = 0$ d'où $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x) + F(-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ Alors F est une fonction impaire.

Q2

Soit G la fonction définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $G(x) = F(\tan x)$

1- Justifier que G est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer $G'(x)$.

2- Déduire l'expression de G sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

3- Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

4- Etudier les variations de F

5- Construire ζ_F

1-

* $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

* $x \mapsto F(x)$ est dérivable sur \mathbb{R} .

$\Rightarrow G$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

$$\text{et } G'(x) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$$

2-

Comme $G'(x) = 1$ pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Alors pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ on a: $G(x) = x + c$

Or $G(0) = F(0) = 0$

Donc pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ on a $G(x) = x$

3-

Comme: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

Alors $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$

Or $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} F(\tan x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} G(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$


4-

* $D_F = \mathbb{R}$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = \frac{\pi}{2}$ et puis que F est impaire alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} F = -\frac{\pi}{2}$

* F est continue et dérivable sur \mathbb{R} et $F'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
F'	+	
F	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$



5-

l'origine O est un centre de symétrie
et aussi un point de la courbe ζ_F
donc c'est un point d'inflexion.

$F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$ les droites $y = \frac{\pi}{2}$ et $y = -\frac{\pi}{2}$ sont des saymptotes à ζ_F

