I. Rappels

$I=[n_0,+\infty[$ désigne un intervalle de $\mathbb{N}$; $(n_0\in\mathbb{N})$; c'est à dire $I=\{n\in\mathbb{N}/n\geq n_0\}$.

<table>
<tr><th>Suite arithmétique de raison r</th><th>Suite géométrique de raison q</th></tr>
<tr><td>

* $U=(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique si et seulement si : il existe un réel fixe r tel que : $\forall n\in I; U_{n+1}=U_n+r$

* $U=(U_n)_{n\in I}$ étant une suite arithmétique de raison r, alors : $\forall(n,m)\in I^2$; on a : $U_n=U_m+(n-m)r$
Si m = 0, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_0+nr$
Si m = 1, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_1+(n-1)\cdot r$
Si m = 2, alors : $\forall n\in I;\ U_n=U_2+(n-2)\cdot r$

* Soit $S=U_p+U_{p+1}+.......+U_k$.
S est la somme de n termes consécutifs de la suite arithmétique U ; (n = k-p+1)
$S=\frac{n}{2}(U_p+U_k)=\frac{n}{2}[2U_p+(k-p)r]$
$S=\frac{\text{Nombre de termes de S}}{2}(\text{1ér terme de S}+\text{dernier terme de S})$
Exemples :
$S=U_0+U_1+.......+U_n=\frac{n+1}{2}(U_0+U_n)$
$=\frac{n+1}{2}(2U_0+nr)$
$S=U_1+U_2+.......+U_n=\frac{n}{2}(U_1+U_n)$
$=\frac{n}{2}(2U_1+(n-1)\cdot r)$

* a,b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique $\Leftrightarrow 2b=a+c$

</td><td>

* $V=(V_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique si et seulement si : il existe un réel fixe q tel que : $\forall n\in I;\ V_{n+1}=q\times V_n$

* $V=(V_n)_{n\in I}$ étant une suite géométrique de raison $q\neq 0$, alors : $\forall(n,m)\in I^2$; on a : $V_n=V_m\times q^{n-m}$
Si m = 0, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_0\times q^n$
Si m = 1, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_1\times q^{n-1}$
Si m = 2, alors : $\forall n\in I;\ V_n=V_2\times q^{n-2}$

* Soit $S=V_p+V_{p+1}+.......+V_k$
S est la somme de n termes consécutifs de la suite géométrique V ; (n = k-p+1)
Si q = 1, alors $S=n\cdot V_p$
Si $q\neq 1$, alors : $S=V_p\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$
Exemples :
<u>1ér cas</u> : q = 1.
$S=V_0+V_1+.......+V_n=(n+1)\cdot V_0$
$S=V_1+V_2+.......+V_n=n\cdot V_1$
<u>2ème cas</u> : $q\neq 1$
$S=V_0+V_1+.......+V_n=V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$
$S=V_1+V_2+.......+V_n=V_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$

* a,b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique $\Leftrightarrow b^2=ac$

$q\in\mathbb{R}$; $n\in\mathbb{N}$

* $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=\begin{cases}+\infty \text{ si } q>1\\ 1 \text{ si } q=1\\ 0 \text{ si } q\in]-1,1[\\ \text{n'existe pas si } q\leq -1\end{cases}$

</td></tr>
</table>

Activités 2 et 3 page 26.

Propriétés

$U=(U_n)_{n\in I}$ une suite réelle définie sur $I=[n_0,+\infty[$

- U est majorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixe M tel que : $\forall n\in I,\ u_n\le M$.
  Le réel M est un majorant de la suite U.
- U est minorée sur I, si et seulement si, il existe un réel fixe m tel que : $\forall n\in I,\ u_n\ge m$.
  Le réel m est un minorant de la suite U.
- Une suite qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée.
- U est dite positive lorsque : $\forall n\in I,\ u_n\ge 0$.
- U est croissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I,\ (n>p\Rightarrow u_n\ge u_p)\Leftrightarrow\forall n\in I,\ u_{n+1}\ge u_n$.
- U est strictement croissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I,\ (n>p\Rightarrow u_n>u_p)\Leftrightarrow\forall n\in I,\ u_{n+1}>u_n$.
- U est décroissante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I,\ (n>p\Rightarrow u_n\le u_p)\Leftrightarrow\forall n\in I,\ u_{n+1}\le u_n$.
- U est strictement décroissante $\Leftrightarrow\forall(n,p)\in I\times I,(n>p\Rightarrow u_n<u_p)\Leftrightarrow\forall n\in I,\ u_{n+1}<u_n$.
- U est constante $\Leftrightarrow\ \forall(n,p)\in I\times I,\ u_n=u_p\Leftrightarrow\forall n\in I,\ u_{n+1}=u_n$
  $\Leftrightarrow$ il existe un réel λ tel que $\forall n\in I,\ u_n=\lambda$.

Convergence des suites réelles

$U=(U_n)_{n\in I}$ une suite réelle définie sur $I=[n_0,+\infty[$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ peut exister comme peut ne pas l'être, lorsqu'elle existe, elle est soit un nombre réel ℓ, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

- Lorsqu'une suite réelle admet une limite alors elle est unique.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell\in\mathbb{R}\Leftrightarrow$ U est convergente vers ℓ.
  $\Leftrightarrow\ \lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\ell|=0$.
- U est divergente $\Leftrightarrow\ \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}u_n \text{ n'existe pas}\\ \text{ou}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\pm\infty\end{cases}$.
- Si $\begin{cases}u_n\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n$ existe et vaut $+\infty$.
- Si $\begin{cases}u_n\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=-\infty\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ existe et vaut $-\infty$.
- Si $\begin{cases}|u_n|\le v_n \text{ pour tout } n>p\\ \text{et}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}v_n=0\end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ existe et vaut 0.

<u>Exercices : 4, 5, 8, 9 pages 35 et 36.</u>

II. *Autres propriétés :*

- Soit $U=(U_n)_{n\in I}$ une suite réelle et a fini ou infini.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = a \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = a \\ et \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n+1} = a \end{cases}.$$

Exercices : 2, 3 page 35.

- Toute suite convergente est bornée.
- Toute suite croissante et majorée est convergente vers un réel ℓ et pour tout n, $u_n \leq \ell$.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente vers un réel ℓ et pour tout n, $u_n \geq \ell$.

Remarques :

Si une suite est croissante et non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
Si une suite est décroissante et non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Exercice :

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+........+\dfrac{1}{2n}$

Montrer que U est croissante. En déduire qu'elle est convergente.

- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$. (la réciproque est fausse).
- Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. (la réciproque est fausse).
- Si $\begin{cases} (u_n) \text{ converge vers } \ell \\ (v_n) \text{ converge vers } \ell' \\ u_n < v_n \text{ à partir d'un certain rang} \end{cases}$ alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \\ \ell \in \mathbb{R} \end{cases}$ alors U est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = \dfrac{2}{n}\cos\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

- **Image d'une suite par une fonction :**

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (u_n) une suite de points de I.

Si $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

- Si (u_n) est une suite qui converge vers un réel ℓ et si $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

Exercice :

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}} \end{cases}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
2. Etudier la monotonie de U.
3. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

- **Suites adjacentes :**

Définition :

Deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes lorsque :

$a_n \le b_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

(a_n) est croissante

(b_n) est décroissante

$\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$.

Théorème :

Si deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes (avec $a_n \le b_n$) alors elles sont convergentes et ont même limite ℓ. De plus pour tout n, on a : $a_n \le \ell \le b_n$.

Exercice : 21 page 38.

Exercice :

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout n de IN, $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{4}\left(2 - u_n^{\ 2}\right)$.

1. Soit la fonction définie sur [1,2] par $f(x) = x + \frac{1}{4}\left(2 - x^2\right)$.
   a) Etudier les variations de f sur [1,2].
   b) Montrer que pour tout x de [1,2], $\left|f(x) - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|x - \sqrt{2}\right|$.
2. a) Montrer par récurrence que pour tout n de IN, $1 \le u_n \le 2$.
   b) Montrer que pour tout n de IN, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \le \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$.
   c) En déduire que pour tout n de IN, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Conclure.