

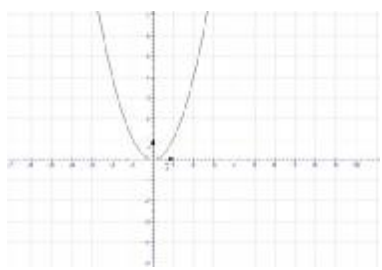
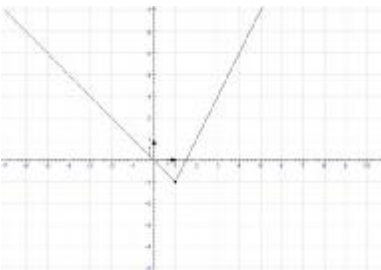
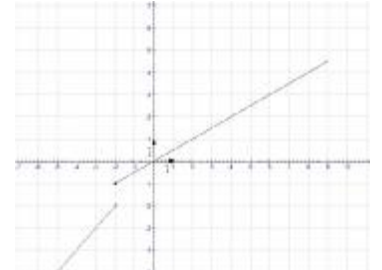


I. Rappels

Notion de continuité :

Graphiquement, on peut reconnaître une fonction continue sur un intervalle I par le fait que le tracé de la courbe représentative de f pour $x \in I$ peut se faire sans lever le crayon de la feuille.

Exemple :

$f(x) = x^2$	$g(x) = -x$ si $x \leq 1$ et $g(x) = 2x - 3$ si $x > 1$	$h(x) = x$ si $x < -2$ et $h(x) = \frac{1}{2}x$ si $x \geq -2$
		
f est continue sur \mathbb{R}	g est continue sur \mathbb{R}	h est continue sur $]-\infty, -2[$ h est continue sur $[-2, +\infty[$ Mais h n'est pas continue en -2

Propriété :

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, la fonction racine carrée sont continues sur tout intervalle sur le quel sont définies.

Activité 1 page 6.

Continuité et limite :

Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I , si et seulement si,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Activités 4, 5 et 6 page 7.

Opérations sur les limites :

Limite d'une somme

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f + g$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Limite d'un produit

Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
Si g a pour limite	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Limite d'un inverse

Si g a pour limite	$l' \neq 0$	0 Par valeurs supérieures	0 Par valeurs inférieures	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite d'un quotient

Si f a pour limite	l	l	$l \neq 0$	0	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Si g a pour limite	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	0	0 par valeurs supérieures ou 0 par valeurs inférieures	$l' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\frac{f}{g}$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	$+\infty$ ou $-\infty$ Suivant les signes	Forme indéterminée

Règles opératoires

La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
La limite en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient de ses termes de plus haut degré.

Activités 7 page 8.

Exercice :

Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + x - 6}{-3x^2 - 5x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{x-1} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - x + 1}}{x} ; \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - x + 1} - 2x.$$

Exercices : 3, 4, 5, 7, 8 et 10 pages 19 et 20.

II. Continuité et limite d'une fonction composée

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur ensemble J tel que $f(I) \subset J$. La fonction notée $g \circ f$, définie sur I par $g \circ f(x) = g[f(x)]$, est appelée fonction composée de f et g .

Exemple :

$$f(x) = 3x + 7 \text{ et } g(y) = y^2.$$

$$g \circ f(x) = \dots\dots\dots$$

...

$$f \circ g(x) = \dots\dots\dots$$

....

Remarque :

.....

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant le réel $f(a)$.

Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a .

Conséquence : La composée de deux fonctions continue est continue.

Activité 3 page 9.

Théorème :

Soit f et g deux fonctions. Soit a, b et c finis ou infinis.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \text{ et } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \text{ alors } \lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c.$$

Activités 4 et 5 page 10.

Exercice :

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$	$-\infty$

Donner en utilisant ce tableau les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\sqrt{x}) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(-1 + \frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{-1}{x^2 + 1}\right) ; \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{1}{f(x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{x^2 + 1}{2x - 1}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x) + 3} ; \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{f(x) + 3}.$$

III. Limites et ordre

Théorème :

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I .

Soit deux réels l et l' .

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}^*$ et si $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = l'$, alors $l \leq l'$.

Si $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}^*$ et si $\lim_a h = \lim_a g = l$, alors $\lim_a f = l$.

Si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}^*$ et si $\lim_a g = +\infty$, alors $\lim_a f = +\infty$.

Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I_{x_0}^*$ et si $\lim_a g = -\infty$, alors $\lim_a f = -\infty$.

Ces résultats restent aussi valables lorsqu'on remplace a par $\pm\infty$ ou par a^+ ou a^- .

Activité 3 page 12.

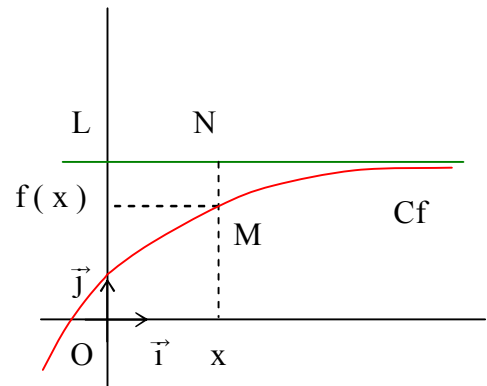
IV. Branches infinies

Asymptote horizontale :

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ où a est un réel et L un réel donné.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

alors la droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.



Asymptote verticale :

Soit f une fonction.

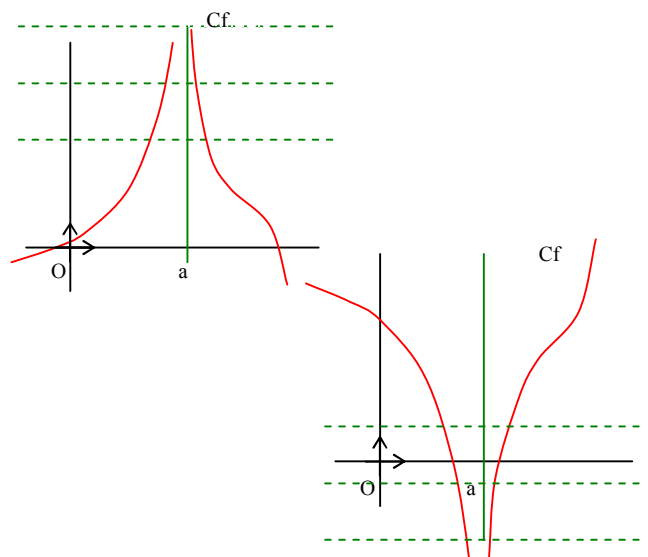
- Si « $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès que x est assez proche de a », alors on dit que f a pour limite $+\infty$ en a .

On note :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

On définit de la même façon $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

- On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f .



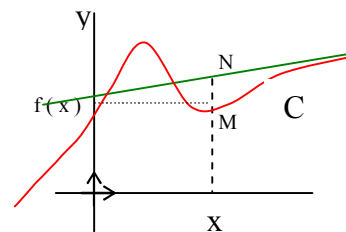
Asymptote oblique :

Soit a ($a \neq 0$) et b deux réels et C la courbe représentant une fonction f dans un repère.

Dire que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) revient à dire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

(respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$)



Ex : Montrer que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 + 2x - 2}{2x}$ admet en $\pm \infty$ une asymptote Δ .

Etudier les positions de C_f et Δ .

Branches paraboliques :

➤ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm \infty$ alors C_f admet une branche parabolique de direction (Oy). (type x^2).

➤ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C_f admet une branche parabolique de direction (Ox). (type \sqrt{x}).

➤ Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm \infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $a \neq 0$ alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax$.

- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = b$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C en $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - ax = \pm \infty$ alors C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = ax$ en $+\infty$.

Activités 3 et 4 page 70.



V. Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité 1 page 12.

Théorème :

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

On peut aussi l'exprimer sous la forme :

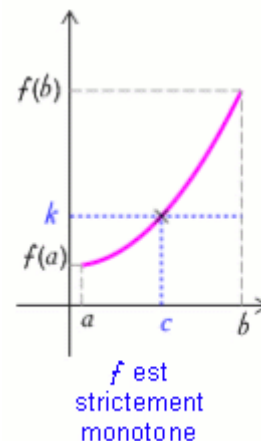
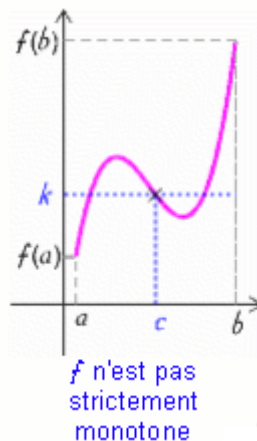
L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution c comprise entre a et b .

En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation

$f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

Si de plus f est strictement monotone sur I , alors c est unique.

Activités 4 et 5 page 13.



Conséquence :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .

Exercice :

Etudier le signe de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x} + 3x$ sur son domaine de définition.

Image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue :

Activité 7 page 15.

Théorème :

Si f est continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [m, M]$

Où m est le minimum de f sur $[a, b]$ et M est le maximum de f sur $[a, b]$.

Cas des fonctions monotones :

Théorème :

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).

Si f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .

Si f est croissante et non majorée alors f tend vers $+\infty$ en b .

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a, b]$ (a fini ou infini).

Si f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .

Si f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .



Théorème :

L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.

Exemples :

Intervalle I	f est croissante sur I	f est décroissante sur I
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = [a, b[$	$f(I) = [f(a), \lim_{b^-} f[$	$f(I) =]\lim_{b^-} f, f(a)]$
$I = [a, +\infty[$	$f(I) = [f(a), \lim_{+\infty} f[$	$f(I) =]\lim_{+\infty} f, f(a)]$
$I =]a, b[$	$f(I) =]\lim_{a^+} f, \lim_{b^-} f[$	$f(I) =]\lim_{b^-} f, \lim_{a^+} f[$

Exercice :

Déterminer l'image de l'intervalle I par la fonction f dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f : x \mapsto x^2 - 2x, I =]-\infty, 0]$.
2. $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}, I = [1, +\infty[$.
3. $f : x \mapsto \sin x, I =]0, \frac{\pi}{2}[$.

