

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION EXAMEN DU BACCALAUREAT Lycée Bachir Sfar Amdoun Béja	Epreuve : MATHEMATIQUES
	Durée : 4 h
	Coefficient : 4
Section : MATHEMATIQUES	Prof : Ghomriani Béchir

Exercice 1 : (3,5 pts)

A 8^h du matin un médicament est injecté par voie intraveineuse. Dans les heures qui suivent, la substance est éliminée par les reins. On désigne par q_i la quantité de médicament présente dans le sang à l'instant t_i .

A l'aide des prises de sang, on a mesuré ces quantités après chaque heure. On a obtenu ainsi une série statistique double (t, q) représentée dans le tableau suivant :

L'heure exacte	8 ^h du matin	9 ^h du matin	10 ^h du matin	11 ^h du matin	Midi	13 ^h	14 ^h
t_i (en heures)	0	1	2	3	4	5	6
q_i (en milligrammes)	9,9	8,7	7,8	6,4	5,6	4,2	3,8

- Construire dans un repère orthogonal le nuage de points de la série (t, q) .
 - Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
 - Calculer $\text{COV}(t, q)$. Interpréter le résultat.
- Déterminer une équation de la droite de régression de q en t par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à l'unité)
 - Déterminer la quantité éliminées par les reins à 15^h : 30mn
 - à quelle heure exacte les reins ont réussi à éliminer 8 milligrammes de ce médicament ?
- On pose : $y = \ln(q)$, on obtient le tableau suivant :

t_i	0	1	2	3	4	5	6
y_i	2,29	2,16	2,05	1,86	1,72	1,44	1,34

- Donner une équation de la droite de régression de y en t (les coefficients seront arrondis au millième)
 - En déduire qu'un ajustement non affine de q en t est $q = 10,298 \times e^{-0,165t}$
- On suppose que ce modèle reste valable jusqu'aux 48 heures.
 - Dans combien d'heures le sang contient moins de 0,9 milligrammes de ce médicament ?
 - Le lendemain le patient se réveille à 9^h du matin il fait ces calculs pour savoir la quantité de médicament qui reste dans le sang et il trouve que le sang contient moins de 0,05 milligrammes. A-t-il raison ? Justifier

Exercice 2 : (5 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$
 - En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{2n} \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2n+1} \equiv 0 \pmod{4}$
- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : 2u_n = 5^{n+2} + 3$
 - déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : 2u_n \equiv 3 \pmod{25}$
- Déterminer l'inverse modulo 25 de 2

b. déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n \equiv 14 \pmod{25}$

4. On considère l'équation $(E) : 4x - 25y = 14$

a. Justifier que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

b. En remarquant que $(16, 2)$ est une solution de (E) montrer que $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(25k + 16; 4k + 2); k \in \mathbb{Z}\}$

5. a. Soit N un entier vérifiant le système $(S) : \begin{cases} N \equiv 0 \pmod{4} \\ N \equiv 14 \pmod{25} \end{cases}$

Montrer que N est solution de (S) si et seulement si $N \equiv 64 \pmod{100}$

b. Déterminer suivant les valeurs de n (pair, impair) les deux derniers chiffres ² de u_n

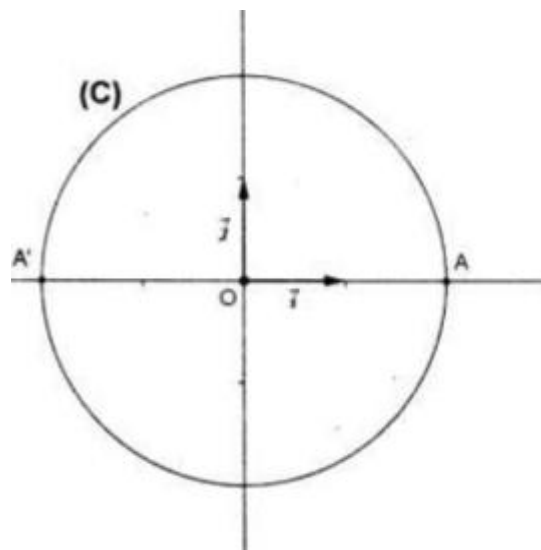
6. a. Justifier que $5^{n+2} \equiv (-1)^n \pmod{3}$

b. En déduire que $u_n \equiv 2 \pmod{3}$ ou $u_n \equiv 1 \pmod{3}$

c. Montrer alors que $u_n \wedge u_{n+1} = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 3 : (3 pts)

Dans la figure ci-contre, (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé et (C) est le cercle de centre O passant par les points $A(2, 0)$ et $A'(-2, 0)$.



1) Soit $P(x, y)$ un point du plan n'appartenant pas à (O, \vec{i}) , H son projeté orthogonal sur l'axe (O, \vec{i}) et $M(X, Y)$ le milieu du segment $[PH]$

a- Exprimer X et Y en fonction de x et y

b- Montrer que lorsque P varie sur le cercle (C) , M varie sur

l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$

c- Tracer l'ellipse (E)

2) Soit $P_0(1, \sqrt{3})$ et $M_0\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ Soit (T) la tangente au cercle (C) en P_0

a- Montrer qu'une équation cartésienne de la tangente (T) est $(T) : "x + \sqrt{3}y - 4 = 0"$

b- Vérifier que la tangente (T) coupe l'axe des abscisses au point $I(4, 0)$

c- Montrer que la tangente à l'ellipse (E) en M_0 passe par I

Exercice N°4 : (2,5 pts)

On considère deux urnes $A : \begin{cases} 6 \text{ boules Blanches} \\ 4 \text{ boules Noires} \end{cases}$ et $B : \begin{cases} 8 \text{ boules Blanches} \\ 2 \text{ boules Noires} \end{cases}$

D'une des deux urnes choisie au hasard (il ya équiprobabilité pour ce choix), on extrait une boule que l'on remet dans l'urne.

- Si elle est blanche on recommence le tirage dans la même urne
- Si elle est noire on recommence le tirage dans l'autre urne

Cette règle est appliquée à chaque tirage et l'on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

On note A_n : " le $n^{\text{ème}}$ tirage se fait dans l'urne A " et $a_n = p(A_n)$

- 1) a . Déterminer a_1
 b . A l'aide d'un arbre de choix déterminer a_2
- 2) A l'aide d'un arbre de choix montrer que pour tout $n \geq 2$ on a : $a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{1}{5}$
- 3) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n - \frac{1}{3}$ pour tout $n \geq 1$
 - a- Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite
 - b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$
 - c- Déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,334$

Exercice 5: (6 pts)

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{\frac{-2}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0
 c) Justifier que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- 2) a) Montrer pour tout réel $t > 0$ que : $1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$
 b) En déduire pour tout $x > 0$ que : $\frac{-4}{x} \leq f(x) - x \leq \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x}$
 c) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote à C_f
 d) Tracer la courbe C_f

II) n est un entier naturel non nul soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} \left(x + \frac{2}{n}\right)e^{\frac{-2}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- 1) a) Montrer que f_n est dérivable à droite en 0
 b) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
- 2) a) Montrer que l'équation $f_n(x) = \frac{2}{n}$ admet une solution unique α_n dans l'intervalle $]0, +\infty[$
 b) Montrer pour tout $x > 0$ que $f_{n+1}(x) - \frac{2}{n+1} > f_n(x) - \frac{2}{n}$
 c) En déduire que (α_n) est décroissante et quelle converge vers un réel L
 d) Montrer que : $n\alpha_n = 2e^{\frac{2}{\alpha_n}} - 2$
 e) En déduire que $L=0$