Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** Mathématiques	Niveau : 4 ème Math
Date : 11 / 05 / 2017	Profs : SAIDI . A & MEDDEB . T	Durée : 4 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (4 pts)

Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation par une entreprise.

Année	2008	2009	2010	2011	2012
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

Les résultats seront donnés arrondis à 10^{-3} prés.

A/ 1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ; y_i)$ dans un repère orthogonal.

2) $a/$ Calculer le coefficient de corrélation r de cette série, un ajustement affine est il fiable? Si oui déterminer l'équation de la droite de régression de y en x.

$b/$ Donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2016.

3) Le tableau ci-dessous indique le nombre annuel exprimé en milliers de véhicules vendus de l'année 2012 jusqu'à l'année 2016.

Année	2012	2013	2014	2015	2016
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

$a/$ Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

$b/$ L'ajustement précédent est il encore adapté ? Justifier la réponse .

4) Les experts décident d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ; y_i)$ pour i entier variant de 4 à 8 par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points pour cela on pose $z = \ln y$.

$a/$ Déterminer une équation de la droite de régression de z en x, en déduire l'expression de y en fonction de x.

$b/$ L'entreprise décide d'arrêter la fabrication de ce modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65000. En quelle année l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

B/ Un véhicule vendu par cette entreprise est garanti un an et sa durée de vie exprimée en années Jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1) Déterminer la valeur de λ a 10^{-2} prés sachant que la probabilité que le véhicule ne tombe pas en panne pendant la période de sa garantie est égale à $0{,}9$.
2) Le véhicule n'est pas tombé en panne pendant la période de garantie, Déterminer la probabilité qu'il ne connaisse pas de pannes au cours des 3 années suivantes.

Exercice n°2 **:** *(4 pts)*

La gendarmerie nationale essaie un nouvel alcootest. Une caractéristique de cet alcootest est que : 96% des individus ivres sont déclarés positifs par ce test.

Une étude statistique montre que :

- Parmi les automobilistes contrôlés, il ya 2% de personnes ivres.
- Le test est positif dans $2{,}9\%$ des cas.

On note $\boldsymbol{T}$ l'événement : « le test de la personne contrôlée est positif ».

On note $\boldsymbol{I}$ l'événement : « la personne testée est ivre ».

1) En utilisant les événements $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{I}$, traduire en langage de probabilités les pourcentages ci-dessus.
2) Un gendarme contrôle un automobiliste au hasard. Calculer la probabilité que cet automobiliste soit :

   $a/$ Ivre et contrôlé positif.

   $b/$ Sobre et contrôlé positif.
3) Calculer la probabilité que cet automobiliste soit ivre sachant qu'il est contrôlé positif.
4) Un contrôle coûte à l'état 4 dinars. Si le test est positif, cela donne lieu à un procès-verbal, puis au paiement d'une amende de 200 dinars. Bien entendu, un test négatif donne lieu à un acquittement. Calculer l'espérance de gain par contrôle pour l'état dans les conditions de ce test.
5) On interroge indépendamment 50 automobilistes qui ont assisté à ce contrôle.

   $a/$ Calculer la probabilité qu'au moins un d'eux soit contrôlé positif.

   $b/$ Déterminer le nombre moyen d'automobilistes contrôlés positifs.

Exercice n°3 : *(8 pts)*

A – Soit f la fonction définie sur $]-\ln 2\,;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2e^{x}-1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a/ Montrer que pour tout $x\in\,]-\ln 2\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-e^{x}}{(2e^{x}-1)\sqrt{2e^{x}-1}}$.

b/ Etablir le tableau de variations de f. Préciser $f(0)$.

c/ Construire $\mathscr{C}_f$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0\,;\,\pi[$ par : $g(x)=-\ln(1+\cos x)$.

a/ Montrer que g est une bijection de $[0\,;\,\pi[$ sur $[-\ln 2\,;+\infty[$.

b/ On note $\varphi=g^{-1}$. Montrer que φ est dérivable sur $]-\ln 2\,;+\infty[$ et que $\varphi'(x)=f(x)$.

B – Pour tout $n\in IN^{*}$, soit F_n la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F_n(x)=\int_0^x\left[f(t)\right]^n dt$.

1) a/ Montrer que $F_1(x)=\varphi(x)-\dfrac{\pi}{2}$.

b/ On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la région du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations : $x=0$ et $x=\ln 2$. Montrer que : $\mathcal{A}=\dfrac{\pi}{6}$.

c/ Vérifier que, pour tout réel $t\geq 0$, on a : $\dfrac{1}{2e^{t}-1}=\dfrac{e^{-t}}{2-e^{-t}}$, puis expliciter $F_2(x)$.

2) On admet que F_n admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$, et on note $L_n=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)$.

a/ Calculer L_1 et L_2.

b/ En remarquant que, pour tout réel $t\geq 0$, on a : $0\leq f(t)\leq 1$, montrer que $F_{n+1}(x)\leq F_n(x)$.

c/ En déduire que la suite (L_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.

3) a/ Montrer que, pour tout réel $t\geq 0$, $f(t)+\left[f(t)\right]^3=-2f'(t)$.

b/ En déduire que, pour tout $n\in IN^{*}$, $F_n(x)+F_{n+2}(x)=\dfrac{2}{n}\left[1-\left(f(x)\right)^n\right]$.

c/ Montrer alors que, pour tout $n\in IN^{*}$, $L_n+L_{n+2}=\dfrac{2}{n}$, puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}L_n$.

4) On pose, pour tout $n\in IN^{*}$, $U_n=(-1)^n L_{2n}$ et $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$.

a/ Montrer que, pour tout $n\in IN^{*}$, $U_{n+1}=U_n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$.

b/ En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\ln 2$.

Exercice n°4 : *(4 pts)*

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E): 9x+5y=1$.

   $a/$ Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 1 (\bmod 5)$.

   $b/$ Donner une solution particulière de (E), puis résoudre l'équation (E).

   $c/$ En déduire les solutions du système $(S): \begin{cases} 9x+5y=1 \\ x \equiv y (\bmod 3) \end{cases}$.

2) Soit N un entier tel qu'il existe un couple d'entiers $(a\ ;\ b)$ vérifiant : $\begin{cases} N = 9a+1 \\ N = 5b+2 \end{cases}$.

   $a/$ Montrer que le couple $(a\ ; -b)$ est solution de (E).

   $b/$ Pour tout entier m, montrer l'équivalence:

   $\begin{cases} m \equiv 1 (\bmod 9) \\ m \equiv 2 (\bmod 5) \end{cases}$ si, et seulement si $m \equiv 37 (\bmod 45)$.

   $c/$ Trouver alors le reste de la division euclidienne de N par 45.

3) Pour rembourser les frais mensuels de transport à ses employés (cadres et ouvriers), une entreprise a dépensé une somme de 1000 dinars.

   Sachant que les cadres ont reçus 90 dinars chacun et les ouvriers 50 dinars chacun.

   Combien pouvait-il y avoir de cadres et d'ouvriers dans cette entreprise ?

Bon courage