

REPUBLICQUE TUSIENNE MINISTRE DE L'EDUCATION DE LA FORMATION <b>LYCEE .TATAOUIE</b>		<b>KHEBIR RIDHA</b>	
		<b>10/05/2018</b>	
<b>SECTION :</b>	<b>MATHEMATIQUES</b>		
<b>EPREUVE :</b>	<b>MATHEMATIQUES</b>	<b>DUREE : 4H</b>	<b>COEFFICIENT : 4</b>

**Exercice n° : 1 (4 points)**

le plan est muni d'un repère orthonormé  $(o, i, j)$

On donne l'ensemble des points  $\zeta$  des points  $M(x,y)$  tels que :  $x^2 + 4y^2 - 2x - 3 = 0$

1/a) Montrer que  $\zeta$  est une ellipse dont on précisera le centre  $W$  et l'excentricité  $e$

b) Déterminer les sommets et les foyers de  $\zeta$  tracer  $\zeta$

2/ soit  $\alpha \in ]0, \pi[ \cup ]\pi, 2\pi[$  et  $M_\alpha$  le point de coordonnées  $(1 + 2\cos \alpha, \sin \alpha)$

a) Vérifier que le point  $M_\alpha$  appartient à  $\zeta$

b) Montrer qu'une équation de la tangente  $(T)$  à  $\zeta$  en  $M_\alpha$  est :

$$x \cos \alpha + 2y \sin \alpha - 2 - \cos \alpha = 0$$

3/ On désigne par  $N$  et  $P$  points d'intersection de  $(T)$  respectivement avec les droites

$$x = -1 \text{ et } x = 3$$

a) Déterminer les coordonnées de  $N$  et  $P$

b)  $F$  étant un foyer de  $\zeta$  montrer que le triangle  $NPF$  est rectangle en  $F$

**Exercice n° : 2 (4 points)**

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par  $u_0 = 14, u_{n+1} = 5u_n - 6$  pour tout entier naturel  $n$ .

1/ a) Vérifier que pour tout entier naturel  $n, 24u_n - 36 \equiv 0 \pmod{4}$

b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n, u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$

c) En déduire que pour tout entier naturel  $m$

$$u_{2m} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2m+1} \equiv 0 \pmod{4}$$

2/ a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n, 2u_n = 5^{n+2} + 3$ .

b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n, 2u_n \equiv 28 \pmod{100}$

c) Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_{2018}$

**Exercice n° : 3 (5 points )**

Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique. L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels.

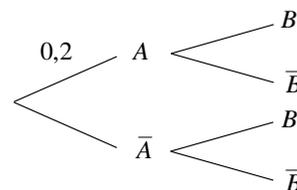
On admet que

- lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0,2 ;
- s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 ;
- s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1.

Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel. On note : les évènements

$A$  « la personne s'abonne à l'édition papier

$B$  « la personne s'abonne à l'édition électronique



1/ a) Déterminer  $p(B/A)$  et  $p(B/\bar{A})$

b) Reproduire et compléter l'arbre suivant :

2/ a) Calculer la probabilité que la personne contactée

s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

b) Justifier que la probabilité de la personne s'abonne à l'édition

électronique est égale à 0,16. les évènements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

3/ Pour chacune des personnes contactée, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue

- 2 dinars si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
- 10 dinars si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
- 15 dinars si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ;
- 20 dinars si la personne s'abonne aux deux éditions.

a) Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la Somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

<b>somme reçue en dinars</b>	2	10	15	20
<b>probabilité</b>				

b) Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5000 lecteurs potentiels.

### Exercice n° : 4 (7 points)

Soit pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $f_n$  définie sur  $] -1, +\infty [$  par  $f_n(x) = \frac{e^x}{(1+x)^n}$ .

Soit  $(C_n)$  la courbe de  $f_n$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé

1/ a) Montrer que  $f_n$  est dérivable sur  $] -1, +\infty [$  et que  $f'_n(x) = \frac{e^x(x+1-n)}{(x+1)^{n+1}}$

b) Soit  $U_n$  la valeur minimale de  $f_n$  sur l'intervalle  $] -1, +\infty [$ .

Montrer que  $U_n = f_n(n-1)$

c) Pour  $x \geq 0$  comparer  $f_{n+1}(x)$  et  $f_n(x)$ .

d) En déduire que la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et qu'elle est convergente.

2/ a) Etudier les variations de  $f_1$  et de  $f_2$ .

b) Etudier la position relative de  $(C_1)$  et  $(C_2)$ . Construire  $(C_1)$  et  $(C_2)$ .

c) En intégrant par partie calculer  $I = \int_0^1 \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ .

d) En déduire, l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  et les droite d'équations :  $x = 0$  et  $x = 1$

3/ Pour tout  $x \in ] \frac{1}{e}, +\infty [$  on pose  $F(x) = \int_0^{\ln x} f_2(t) dt$ .

a) Justifier l'existence de  $F(x)$  pour tout  $x \in ] \frac{1}{e}, +\infty [$ .

b) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $] \frac{1}{e}, +\infty [$  et calculer  $F'(x)$

c) On admet que pour tout  $x \in ] \frac{1}{e}, 1 ]$ , on a  $F(x) \leq x \left( 1 - \frac{1}{1 + \ln x} \right)$

Calculer limite de  $F$  à droite en  $\frac{1}{e}$ .

4/ a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\text{Pour tout } x > \frac{1}{e} ; F(x) = \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1 + 2 \int_0^{\ln x} f_3(t) dt$$

b) En déduire que pour tout  $x \geq 1$ ;  $F(x) \geq \frac{x}{(1 + \ln x)^2} - 1$ .

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

5/ Montrer que  $F$  est une bijection de  $] \frac{1}{e}, +\infty [$  sur  $\mathbb{R}$ .