

<i>L. Regueb</i>	<b>Mathématiques</b>	<i>Classe : 4<sup>ème</sup> M</i>
<i>Prof : Salhi Noureddine</i>	<i>Devoir Final</i>	<i>Le:05/05/2016 D:4h</i>

Exercice1(5pts)

ABCDEFGH est un cube .

I est le milieu du segment  $[AB]$  ,

J est le milieu du segment  $[EH]$  ,

K est le milieu du segment  $[BC]$

et L est le milieu du segment  $[CG]$  .

On munit l'espace du repère orthonormé direct  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1)a) Démontrer que la droite  $(FD)$  est orthogonale au plan  $(IJK)$

b) En déduire une équation cartésienne du plan  $(IJK)$

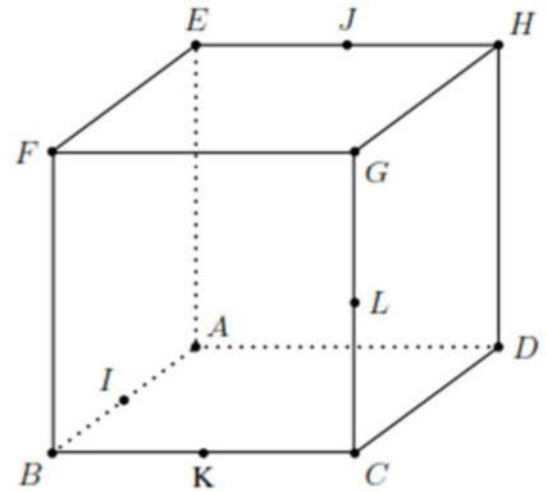
2) Déterminer une représentation paramétrique la droite  $(FD)$

3) Déterminer les coordonnées du point  $\Omega$  , intersection de la droite  $(FD)$  et du plan  $(IJK)$  .

4)a) Déterminer la nature du triangle  $(IJK)$  et calculer son aire .

b) Calculer le volume du tétraèdre  $FIJK$ .

5) Les droites  $(IJ)$  et  $(KL)$  sont-elles sécantes ?



Exercice2(4pts)

Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  , l'équation  $(E): 17x - 11y = 1$  .

1)a) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  , l'équation  $(E)$  .

b) Résoudre en suite dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  , l'équation  $(E'): 17x - 11y = 2$  .

2) Montrer qu'il existe un seul entier  $x_0$  tel que  $0 \leq x_0 < 11$  vérifiant  $17x_0 \equiv 1 [11]$  et déterminer sa valeur .

3) Soient  $x, y$  et  $a$  trois entiers tels que  $x = 17a - 2$  et  $y = 3a - 1$  .

a) Calculer  $3x - 17y$  et en déduire les valeurs possibles de  $d = \text{pgcd}(x, y)$  .

b) Déterminer les valeurs de  $x$  pour  $d = 11$  .

### Exercice3(5pts)

Un constructeur automobile achète des pneus à 3 fournisseurs dans les proportions suivantes :

20% au premier fournisseur , 50% au deuxième fournisseur et 30% au troisième fournisseur .

Le premier fournisseur fabrique 90% de pneus sans défaut , le second fournisseur fabrique 95% de pneus sans défaut et le troisième fabrique 80% de pneus sans défaut .

Tous les résultats seront donnés à  $10^{-3}$  près .

1) On choisit un pneu au hasard dans la livraison .

a) Construire un arbre pondéré décrivant cette situation .

b) Déterminer la probabilité que le pneu soit sans défaut .

c) Le pneu choisi étant sans défaut , qu'elle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur .

2) On considère un lot de 20 pneus .

a) Déterminer le nombre moyen de pneus défectueux .

b) Déterminer la probabilité qu'un pneu au plus soit défectueux .

3) La durée de vie en km d'un pneu est une variable aléatoire  $X$  qui suit une loi exponentielle de paramètre  $2 \cdot 10^{-5}$  .

a) Quelle est la densité de probabilité de cette loi .

b) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure moins de 50 000 km ?

c) Quelle est la probabilité qu'un pneu dure plus que 100 000 km ?

### Exercice4(6pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  .

1)a) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 .Interpréter graphiquement le résultat obtenu .

b) Dresser le tableau des variations de  $f$  .

c) Montrer que  $f$  possède une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie et continue sur un intervalle que l'on précisera .

d) Tracer  $(C)$  et  $(C')$  où  $(C')$  est la courbe représentative de  $f^{-1}$  .

( on pourra préciser en particulier la demi tangente à  $(C')$  à l'origine ) .

2)  $x$  étant un réel tel que  $0 < x \leq 1$ .

a) Calculer l'intégrale  $G(x) = \int_x^1 tf'(t)dt$ .

On pourra chercher une primitive sur l'intervalle  $]0, +\infty[$  de la fonction  $t \mapsto tf'(t)$ .

b) On pose  $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$ . Exprimer  $F(x) + G(x)$  à l'aide de  $x$ .

c) Déduire l'expression de  $F(x)$  à l'aide de  $x$ .

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par  $(C)$  et  $(C')$  et les droites d'équations  $x = 1$  et  $y = 1$ .

4)  $n$  étant un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que l'équation  $f(x) = \frac{1}{n}$  possède une solution unique  $\alpha_n$  dans l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

b) Montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est décroissante puis qu'elle est convergente.

c) calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$  et montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \ln(n) = 1$ .