LYCEE TECHNIQUE O . CHATTI M'SAKEN
PROF : MR : BAHLOUL RIDHA

Classe : 4ème MATH

Le 05 / 05 / 2016

DEVOIR DE SYNTHESE N°3

Durée 4 H

EXERCICE N° 1 : Dans l'espace ξ rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On donne les points **A (0 ; 3 ; 0) , B (0 ; 0 ; 4) et C (2 , 0 , 4).**

1) a) Déterminer une équation cartésienne du plan **(OAB),** Calculer l'aire du triangle **OAB**.

b) Montrer que la droite **(BC)** $\perp$ **(OAB).** En déduire le volume du tétraèdre **OABC**.

2) a) Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs de **[OA], [OB] et [BC].**

b) En déduire que les points **O, A, B et C** se trouvent sur la sphère **S** de centre **J** et de rayon **R,** avec **J** $\left(1, \frac{3}{2}, 2\right)$ et **R** un réel que l'on calculera.

b) Déterminer **le centre et le rayon** du cercle circonscrit au triangle **OAB**.

3) Soit **h** l' homothétie de centre **C** de rapport (**- 2**) et soit **O' , A' et B'** les images respectifs de **O , A et B** par **h**.

a) Calculer le volume du tétraèdre **O'A'B'C**.
b) Caractériser **S' = h (S).**

EXERCICE N° 2 : Soit **f** la fonction définie sur **[0, + ∞[** par $f(x) = \sqrt{1-e^{-x}}$ **.**

A) 1) a) Etudier la dérivabilité de **f** a droite en **0**.Interprété le résultat obtenu.
b) Etudier les variations de **f**.
c) Tracer la courbe **(C)** de **f** dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Montrer que **f** admet une fonction réciproque **g** définie sur un intervalle **J** à préciser.
b) Expliciter **g(x)** pour tout x de **J**.
c) Prouver que l'équation **g(x) = x** admet sur $]0,1[$ une solution unique $\alpha \in]0.7, 0.8[$.
d) Tracer la courbe **(C')** de **g** dans le même repère que **f**.

3) Calculer le volume **V** du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc γ autour de l'axe des abscisses où $\gamma = \{M(x,y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } 0 \le x \le \alpha\}$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction F_n définie sur **[0, 1 [** par :

$$F_n(x) = \int_0^{g(x)} [f(t)]^n\,dt \quad \text{et } u_n = F_n(\alpha)$$

1) Montrer que pour tout **n de IN*** ; $0 \leq u_n \leq \alpha^{n+1}$. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

2) Montrer que F_n est dérivable sur **[0, 1[** et que $F'_n(x) = \frac{2x^{n+1}}{1-x^2}$.

3) a) Montrer que : $F_{n+2}(x) - F_n(x) = \frac{-2x^{n+2}}{n+2}$.

b) Déduire que : $u_{n+2} = \frac{-2\alpha^{n+2}}{n+2} + u_n$.

c) Montrer alors que : pour tout **n ∈ IN***, $u_{2n} = \alpha - 2\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\alpha^{2k}}{2k}$.

<u>EXERCICE N°3:</u> François a créé un site web. Le tableau ci-dessous présente l'évolution du nombre hebdomadaire de visiteurs de ce site au cours des huit premières semaines suivant sa création.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

1) a) Représenter le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal, en prenant pour unités 1 cm pour une semaine sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 visiteurs sur l'axe des ordonnées.

2) Déterminer les coordonnées du point moyen ***G*** de ce nuage de points, et le placer dans le repère précédent (on arrondira l'ordonnée du point ***G*** à l'unité près).

3) a) Déterminer l'équation de la droite ***(D)*** d'ajustement affine de ***y* en *x***, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients ***a* et *b*** seront arrondis à l'entier.

b) Tracer la droite ***(D)*** dans le repère précédent.

4) En utilisant l'ajustement affine précédent, estimer le nombre de visiteurs lors de la dixième semaine suivant la création du site.

5) En remarquant que l'augmentation du nombre de visiteurs est plus faible sur les dernières semaines, on peut penser à faire un ajustement de type « logarithmique ». Pour cela, on pose : $z = \ln(x)$.

a) Complete le tableau suivant : en arrondissant les résultats obtenus à 10^{-3} près.

Rang de la semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
$z_i = \ln(x_i)$	0	0,693		1,386	1,609		1,946	2,079
Nombre de visiteurs y_i	205	252	327	349	412	423	441	472

b) On admet que l'équation de la droite ***(d)*** d'ajustement affine de ***y* en *z***, obtenue par la méthode des moindres carrés, est : $y = 133z + 184$. En utilisant ce résultat, procéder à une nouvelle estimation du nombre de visiteurs lors de la dixième semaine (le résultat sera arrondi à l'unité).

c) À l'aide de ce nouvel ajustement, déterminer le rang de la semaine au cours de laquelle le nombre prévisible de visiteurs dépassera **600**.

EXERCICE N° 4 :

1) On considère dans Z x Z, l'équation **(E) : $5x - 3y = 11$.**

Montrer que **(x, y)** est solution de **(E)** si et seulement si **$x = 3k + 1$ et $y = 5k - 2$**, où $k \in \mathbb{Z}$.

2) Pour tout entier relatif k on pose **$d = (3k+1) \wedge (5k-2)$.**

a) Montrer que : **$d = 1$ ou $d = 11$**.

b) Montrer que : **$d = 11$ si et seulement si $k \equiv 7\ [11]$**

3) Le plan étant munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

Δ la droite d'équation **$5x - 3y = 198$**

a) Déterminer les points **M** de Δ dont les coordonnées **(a, b)** sont des entiers relatifs .

b) Déterminer parmi ces points ceux qui ont pour abscisses entre **0 et 10.**

EXERCICE N°5: Un animateur fabrique des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant soit défectueux est égale à 0.02 .

1) On achète **50** composants. Soit **X** l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de composants défectueux parmi les 50 achetés.

a) Calculer **$p(\{X = 2\})$ et** **$p(\{X \geq 1\})$** .

b) Calculer le nombre moyen de composants défectueux dans les 50 composants achetés.

c) Soit **F** la fonction de répartition associée à **X** . Calculer **F(49,99)**

2) On suppose que la durée de vie **T** (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre **$\lambda = 0.005$**.

a) Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant défectueux soit supérieur à **1000 heures.**

b) Déterminer la fonction de répartition de **T** et tracer sa courbe.

3) Durant la soirée l'animateur dispose d'un **CD** « Musique classique » dont la durée est de **30 minutes**. On appelle **T'** la variable aléatoire qui donne, en minutes, le temps écoulé entre la mise en marche du CD et le changement de musique.

On admet que **T'** suit une loi uniforme sur l'intervalle **[0 ; 30].**

a) Quelle est la probabilité qu'un spectateur écoute de la musique classique plus que **10 minutes** ?
b) Sachant qu'après **10 minutes** le spectateur écoute de la musique classique qu'elle est la probabilité qu'il entend encore de la musique classique au bout de **28minutes** ?