

EXERCICE 01 : (3 points)

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - 2y = xe^x$

- 1) Résoudre l'équation différentielle (E₀) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R}
- 2) Soit a et b deux réels et soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax + b)e^x$
 - a) Déterminer a et b pour que g soit une solution de (E)
 - b) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $f - g$ est une solution de (E₀)
 - c) En déduire l'ensemble des solutions de (E)
- 3) Déterminer la solution de (E) qui s'annule en 0

EXERCICE 02 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1 + x^2)$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O; $\vec{i}; \vec{j}$)

I.1) Montrer que pour tout x appartenant $[0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$

2) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = x - 2\ln x - \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$, puis interpréter graphiquement le résultat trouvé

3) Dresser le tableau de variation de f

4) a) Donner une équation de la tangente Δ à la courbe (C) au point O

b) Donner la position relative de la droite Δ et la courbe (C)

c) Tracer dans le repère (O; $\vec{i}; \vec{j}$) la droite Δ et la courbe (C)

II. Soit G la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $G(x) = \int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2} dt$

1) a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée

b) En déduire que pour tout x appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $G(x) = x$

c) Calculer alors $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$

2) On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

a) A l'aide d'une intégration par partie, montrer que $\int_0^1 \ln(1+t^2) dt = \ln 2 - 2 + 2 \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

b) En déduire la valeur de \mathcal{A}

EXERCICE 03 : (4 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = 2 \times 10^n + 1$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n est divisible par 3
- 2) a) Discuter selon les valeurs de n le reste de la division euclidienne de a_n par 11
b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, a_n et 11 sont premiers entre eux
- 3) On considère, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $a_n x + 11y = 1$
a) Vérifier que le couple $(4, -73)$ est une solution de (E) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
b) Résoudre, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E)
- 4) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j})$

On considère le point A_n d'affixe $z_n = 2e^{i \frac{a_n \pi}{4}}$

- a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, A_n appartient à un cercle fixe que l'on précisera
- b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \in \{A_1; A_2\}$

EXERCICE 04: (4 points)

Une usine fabrique des stylos à bille. Une étude statistique a montré que 90% de la production ne présente pas de défaut. Chaque stylo est soumis à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 94% des stylos avec défaut et accepte 92% des stylos sans défaut. On choisit au hasard un stylo avant son contrôle.

On désigne par D l'évènement « le stylo a un défaut » et par A l'évènement « le stylo est accepté à l'issue du contrôle »

- 1) a) Déterminer les probabilités $p(\bar{D})$, $p(\bar{A} / D)$ et $p(A / \bar{D})$
b) Calculer la probabilité que le stylo soit accepté
- 2) Calculer la probabilité qu'un stylo a un défaut sachant qu'il est accepté
- 3) Les stylos acceptés à l'issue du contrôle se vendent par paquet de quatre. On admet que la probabilité qu'un stylo accepté présente un défaut est 0,007. Calculer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité qu'un paquet contienne au moins un stylo présentant un défaut
- 4) On estime que la durée de vie T en jours d'un stylo accepté suit la loi exponentielle de paramètre λ un réel strictement positif
a) Déterminer λ sachant que $p(T > 10) = \frac{1}{e}$
b) On sait que le stylo a déjà dépassé 10 jours d'utilisation. Quelle est la probabilité qu'il dépasse 15 jours ?
c) Soit h un réel strictement positif. Montrer que $p((T > 10 + h) / (T > 10)) = p(T > h)$

EXERCICE 05: (3 points)

On donne les hauteurs, en centimètres, d'une plante mesurée tous les trois jours à midi du premier au 16 juillet

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
Hauteur y_i	6,5	8,4	12	15,4	19,7	24,6

On pose $Z = \ln Y$

Les valeurs de Z, arrondis à 10^{-2} près, sont données dans le tableau qui suit

Jour x_i	1	4	7	10	13	16
$z_i = \ln y_i$	1,87	2,13	2,48	2,73	2,98	3,20

- 1) Calculer le coefficient de corrélation linéaire ρ de la série (X, Z) . Interpréter le résultat
- 2) a) Donner une équation de la droite de régression de Z en X
(On donnera les coefficients de cette équation arrondis à 10^{-2} près)
b) En déduire que l'expression de Y en fonction de X est de la forme $Y = \alpha e^{\beta X}$
(α et β étant deux réels dont on donnera les valeurs respectives arrondies à 10^{-2} près)
- 3) On suppose que la croissance se poursuit ainsi tous le mois de juillet
 - a) A quelle date la plante mesurera-t-elle 40 cm ?
 - b) Quelle est la hauteur atteinte le 31 juillet à midi ?

Que Dieu soit à l'aide de tous